



CRR DISCUSSION PAPER SERIES J

Discussion Paper No. J-71

**超低金利環境における
日本国債のゼロクーポン金利推定**

菊池 健太郎

2019年5月

**Center for Risk Research
Faculty of Economics
SHIGA UNIVERSITY**

**1-1-1 BANBA, HIKONE,
SHIGA 522-8522, JAPAN**

滋賀大学経済学部附属リスク研究センター

〒522-8522 滋賀県彦根市馬場 1-1-1

超低金利環境における 日本国債のゼロクーポン金利推定*

滋賀大学経済学部 菊池健太郎

概要

国債のゼロクーポン金利は、金融実務や学術研究で幅広く利用されるものであるが、金融市場で直接観察されないものであり、利付国債の市場価格を用いた推定が必要となる。ゼロクーポン金利の推定に係る多くの先行研究において、スプライン回帰法に基づく推定は、市場価格と高い適合度を持つとの結果が得られている。しかし、近年の日本国債市場のような超低金利環境におけるゼロクーポン金利の推定について、スプライン回帰法の精度検証が十分に行われているとは言いがたい。そこで、本研究では、最近までの約10年間の日本国債の市場価格データを用いて、スプライン回帰法に基づくゼロクーポン金利の推定を行い、推定精度を検証する。さらに、本研究では、スプライン回帰法でしばしば問題となる過剰適合を回避する有力な手法である平滑化スプライン法に基づき、ゼロクーポン金利の推定も行う。その際、推定されるゼロクーポンカーブや瞬間フォワードカーブの凹凸の抑制度合いの観点から、複数の平滑化パラメータ選択規準間の比較を行う。また、同一の推定手法から得られる推定値を持続的に利用するという実用上の観点を踏まえ、ゼロクーポンカーブや瞬間フォワードレートカーブの時間方向でみた安定性についての比較・検証も行う。

キーワード：ゼロクーポン金利、利付国債、スプライン関数、マイナス金利、平滑化スプライン

JEL 分類番号：C14、E43、G12

1 はじめに

日本銀行は、2013年4月、「量的・質的金融緩和政策（Quantitative Qualitative Easing Policy; 以下、QQE）」と呼ばれる大規模な金融緩和政策を実施することを決定した。その後、日本銀行は、2016年1月に「マイナス金利付きQQE（いわゆるマイナス金利政策）」、同年9月に「長短金利操作付きQQE」を導入する金融政策の変更を行ったが、これらの政策（本稿では簡単のため、これら3つの政策をまとめてQQEと呼ぶ場合がある）の主軸は、日本銀行による大規模な日本国債買入れであることに変わりはない。確かに2001年3月～2006年3月の間、日本銀行は「量的緩和政策」を実施し、日本国債の買入れを実施していた。しかし、その規模は現状のQQEと比べると小さいだけでなく、買入れ銘柄の年限も短期であった。QQEの実施以降、金利、特に長期・超長期ゾーンの金利は低下し、前例のない低水準で推移している（図1参照）。さらに、マイナス金利付きQQEが実施された2016年2月以降、日本国債の短中期金利は、財務省が公表している半年複利金利で見て負の水準で推移している。2016年半ばには、長期金利（10年金利）でも一時 -0.3% 近くまで低下した。このように、ここ数年の日本国債金利のイールドカーブは負の水準を含んでいる。本稿では、負値を含むイールドカーブを「マイナスイールドカーブ」と呼ぶことがある。QQE導入以降の日本国債市場は、①日本銀行の保有割合が前例のない規模に増大し（日本銀行の保有割合は2012年12月末に10%程度だったが2018年12月末

*本研究は、公益財団法人 全国銀行学術研究振興財団と JSPS 科研費基盤研究 (C) 17K03802 の助成を受けたものである。

には45%程度の保有割合にまで上昇している), ②前例のない超低金利環境となっており, ③特に, 日本銀行がマイナス金利付きQQEを開始した2016年2月以降はマイナスイールドカーブが常態化している. ①~③を踏まえると, 近年の日本国債市場は, 極めて特殊な環境にあるといえるだろう.

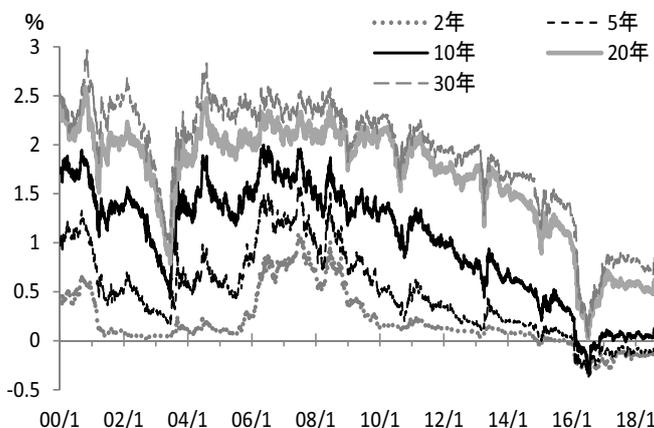


図 1: 日本国債金利 (複利最終利回り) の推移

(出所) 財務省.

(注) 2000年1月4日~2019年2月28日のデータ.

国債のゼロクーポン金利は, 資産価格評価や相対価値戦略の構築をはじめとする金融取引実務で利用される. また, 経済動向や金融政策に関する分析にも活用されている. 当該金利は, 市場で直接観察されるものではなく, 国債の市場価格から推定する必要がある. 推定においては, 市場価格への適合性という観点だけでなく, 国債の元利金支払いのない期間に対応する年限のゼロクーポン金利を適切に内挿できているのかも問題となる.

ゼロクーポン金利推定に関する初期の研究の代表例として, McCulloch[8], [9] が挙げられる. 同研究では, 割引係数 (discount factor) を, スプライン関数を基底とする線形結合で表したうえで, 係数を最小二乗法により推定する手法を提案した. McCulloch[8] は, 基底関数として2次スプライン関数を用い, McCulloch[9] は3次スプライン関数を用いた. Steeley[12] は, 3次Bスプライン関数を基底関数とする線形結合で割引係数を表現し, 係数を最小二乗法により推定した. 以上の手法は「スプライン回帰法」と呼ばれ, 最小二乗法の枠組みで計算負荷をかけることなく係数を推定できる利点がある. さらに, 基底関数を構成するスプライン関数の数を増やせば, 市場価格との適合度を高められる利点もある. しかし, 基底関数の数を増やしすぎると, 得られるゼロクーポン金利のイールドカーブ (以下, ゼロクーポンカーブと呼ぶ) の凹凸が過度になる, いわゆる過剰適合の問題に直面する. また, ゼロクーポンカーブの凹凸はそれほど顕著でなくても, 瞬間フォワードレートカーブの凹凸が過度になるという問題がしばしば生じ得る.

このような, スプライン回帰法に基づくゼロクーポンカーブや瞬間フォワードレートカーブの凹凸に伴う問題に対処するため, Fisher et al.[4] は「平滑化スプライン法」に基づく方法を提案した. 具体的には, 瞬間フォワードレートをBスプライン関数を基底関数とする線形結合で表し, 市場価格とモデルから推定される価格の二乗誤差に瞬間フォワードレートカーブの凹凸度を表す項を罰則項として加算した値を最小化するという方法である. 平滑化スプライン法では, 推定の際にゼロクーポンカーブや瞬間フォワードレートカーブを滑らかにするパラメータ (平滑化パラメータ) を選択する必要があるが, Fisher et al.[4] では一般化交差検証 (GCV; Generalized Cross Validation) による選択を行っている. Jarrow et al.[6] は, Ruppert[11] が

提案した EBBS 法 (Empirical Bias Bandwidth Selection) に則り, 推定される瞬間フォワードレート (平均二乗誤差 (MSE; Mean Squared Error) を最小にする平滑化パラメータの選択法) を提案した. 川崎・安道 [15] は, 割引係数をガウス型動径関数を基底関数とする線形結合で表し, 平滑化法¹でゼロクーポン金利を推定する方法を提案している. 同論文では, 平滑化パラメータを Konishi and Kitagawa[7] が提案した一般化情報量規準 (Generalized Information Criteria; GIC) で選択する方法を提案した.

過剰適合の回避が可能な, 平滑化スプライン法とは異なるゼロクーポン金利の推定方法として, Nelson and Siegel[10] や Svensson[13] が挙げられる. 彼らの方法は, 瞬間フォワードレートを少数のパラメータを有する特定の関数形で表現するというものである. この方法では, カーブの凹凸が過剰になることは避けられるが, 推定すべきパラメータ数が少ないため, 適合度がスプライン回帰法と比べて劣ることになる. また, パラメータ推定を非線形最小二乗法に頼らなければならないという点にも留意する必要がある².

日本国債のゼロクーポン金利推定に関する研究は, 小峰他 [17], 前出の川崎・安道 [15], 菊池・新谷 [16], 阿部他 [14], 三宅・服部 [19] などがある. 小峰他 [17] は, 1980 年代の 4 時点の日本国債の価格データを用いて, 複数のゼロクーポン金利推定手法間のパフォーマンスの比較を行った. 川崎・安道 [15] は, 上述の通り, ガウス型動径関数の線形結合で割引係数を表現し, 平滑化パラメータを一般化情報量規準 (GIC) で選択するという方法を提案した. そのうえで, 1995 年 6 月, 1997 年 7 月, 2001 年 8 月の 3 時点の価格データをもとに提案手法のパフォーマンスが McCulloch[9] の方法より高いことを実証的に示した. 菊池・新谷 [16] は, 小峰他 [17] と同様に, 複数の推定手法の比較を行った. 同論文では, 1999 年~2010 年という長期間の価格データを使用し, 適合性, イールドカーブの凹凸度, 金利の非負性という複数の評価基準に基づき比較を行った. その結果, 3 次 B スプラインの線形結合で割引係数を表す Steeley[12] の手法が良いと結論付けた. 阿部他 [14] では, 価格データからブートストラップ法により割引金利を推定した後, 同金利がガウス動径関数の線形結合で表されていると仮定し, 2007 年~2012 年のデータを用いて一般化情報量規準に基づく平滑化法で推定を行った. 同論文は, 債券価格ではなく, 価格からブートストラップ法により求めた割引金利を平滑化推定のフィッティングの対象としている点と, 年限が 40 年のゼロクーポン金利を推定している点が他の研究には見られない特徴である. 三宅・服部 [19] は, ゼロクーポン金利推定に関する研究のサーベイを行った.

上で挙げた多くの先行研究で, スプライン回帰法による推定は市場価格と高い適合度を有するとの結果が得られている. 但し, いずれも, QQE 導入以降の日本国債市場で見られる超低金利局面は分析対象とはなっていない. 本節冒頭でも記した通り, QQE 導入以降の日本国債市場は, 日本銀行が大規模に国債を買い入れている点や長期・超長期金利が前例のない低水準となるなど特殊な環境にある. 以上の環境において, 先行研究で高い価格適合性を有するとされてきたスプライン回帰法による推定精度が維持されるのかどうかを確認しておくことは有意義と考えられる. そこで本稿では, スプライン回帰法の代表例といえる, McCulloch[9] と Steeley[12] による 3 次スプライン関数の線形結合によって割引係数を表す 2 つのモデルに対して, QQE 導入以降の日本国債価格データを含む長期データを用いて, ①市場価格との適合性, ②ゼロクーポンカーブの凹凸度, ③マイナス金利が市場で観察されるようになる以前の時期における負値の推定金利発生の有無, といった観点からスプライン回帰法の妥当性を検証する.

¹川崎・安道 [15] では, 割引係数を構成する基底関数はスプライン関数ではなくガウス型動径関数が用いられている. そこで本稿では, 彼らの手法を平滑化スプライン法ではなく, 単に平滑化法と記すことにする.

²Gürkaynak et al.[5] は, 1961 年以降の米国債のゼロクーポン金利を, Svensson[13] の手法に基づいて日次レベルで推定し, 分析結果を論文として公表するとともに, 推定結果を米国連邦準備制度理事会 (Federal Reserve Board) のホームページ上 (<http://www.federalreserve.gov/pubs/feds/2006>) に公開した. なお, 論文公表後も, 米国債のゼロクーポン金利の推定値は, 同ホームページ上に随時更新されている.

スプライン回帰法は市場価格と高い適合性を示す一方、ゼロクーポンカーブや瞬間フォワードレートカーブの凹凸が過剰になる懸念がある点も、多くの先行研究で得られている共通認識である。上述の通り、Fisher et al.[4]などで使われた平滑化スプライン法に基づく推定が、過剰適合の有力な回避手段となる。平滑化スプライン法を用いて日本国債のゼロクーポンカーブや瞬間フォワードレートカーブの推定を行った最近の研究は、上述の阿部他 [14] であるが、同研究は QQE 導入以降のデータを含むものではない。そこで、本研究では、QQE 導入以降のゼロクーポンカーブや瞬間フォワードレートカーブの推定を平滑化スプライン法を用いて行う。具体的には、GCV, GIC, EBBS の 3 つの平滑化パラメータ選択規準を持つそれぞれの平滑化スプライン法に基づき、ゼロクーポン金利の推定を行い、各平滑化パラメータ選択規準間での比較を行う。推定により得られるゼロクーポンカーブや瞬間フォワードレートカーブが、各営業日において凹凸が抑制されているかを検証するだけでなく、推定値の時間方向の安定性についての検証も行う。後者の点は、平滑化スプライン法によって、平滑化パラメータの選択規準などの前提を変えずに推定した推定値を、金融実務や経済分析に持続的に利用することを念頭に置いたものである。仮に、選択される平滑化パラメータの水準が 1 日で大きく変わる場合、得られるゼロクーポンカーブや瞬間フォワードレートカーブの形状が 1 日で大きく変化する可能性がある。このような時間方向に安定しない推定値は、金融実務や経済分析で使いにくいものとなるに違いない。平滑化スプライン法により推定されるゼロクーポン金利や瞬間フォワードレートの推定値の時間方向での安定性に対する着眼点は、先行研究では見られなかったものである。

以下に、本稿の構成を示す。2 節では、ゼロクーポン金利の推定手法をスプライン回帰法と平滑化スプライン法に焦点を当てて解説する。3 節では、スプライン回帰法と平滑化スプライン法に基づく約 10 年の日本国債データを用いた推定結果について分析を行う。4 節はまとめと今後の課題を記す。

2 スプライン回帰法によるゼロクーポン金利の推定手法

2.1 記法の準備

本小節では、ゼロクーポン金利推定手法を解説するための記法を準備する。以下のように記号を置く。

N : 銘柄数.

α : 銘柄を表す添え字. $\alpha = 1, \dots, N$.

P_α : 銘柄 α の市場価格.

A_α : 銘柄 α の経過利息.

t_j : 対象とする銘柄群のうち少なくとも 1 銘柄でキャッシュフローが発生し、計測日以降 j 回目の発生に相当する日までの年数.

n : 対象とする銘柄群について、キャッシュフローが発生する時点の総数.

t_n : 対象とする銘柄群の償還年数の最大値.

$c_{\alpha,j}$: 銘柄 α の t_j におけるキャッシュフローの金額 (ゼロの場合もある).

$Z(t)$: t 年の割引係数.

$y(t)$: t 年ゼロクーポン金利. すなわち, $y(t) = -\frac{1}{t} \log Z(t)$.

$f(t)$: t 年瞬間フォワードレート.

以上のように記号を置くと, 下記式が成り立つ.

$$P_\alpha + A_\alpha = \sum_{j=1}^n c_{\alpha,j} Z(t_j) + \varepsilon_\alpha. \quad (1)$$

ここで, ε_α は残差項であり, その期待値はゼロ, すべての α について分散は等しく, 異なる銘柄の残差項同士の共分散はゼロと仮定する.

上で用意した幾つかの記号について, 銘柄やキャッシュフロー発生時点でまとめて, ベクトルや行列とした記法も用意しておく.

P: 市場価格 P_α を銘柄 $\alpha = 1, \dots, N$ について縦に並べた縦ベクトル.

A: 経過利息 A_α を銘柄 $\alpha = 1, \dots, N$ について縦に並べた縦ベクトル.

C: キャッシュフロー $c_{\alpha,j}$ を銘柄 $\alpha = 1, \dots, N$ について縦に並べ, キャッシュフロー回数 $j = 1, \dots, n$ について横に並べて行列としたもの.

2.2 McCulloch[9] の方法

McCulloch[9] は, 割引係数 $Z(t)$ を 3 次スプライン関数 $B_k(t)$ の線形和で次のように表した.

$$Z(t) = 1 + \sum_{k=1}^m w_k B_k(t). \quad (2)$$

ここで, 3 次スプライン関数 $B_k(t)$ の節点は $0 = u_0 = u_1 < u_2 < \dots < u_m$ であり, $B_k(t)$ ($k = 1, \dots, m$) は次のように定義される.

$k \neq m$ のとき,

$$B_k(t) = \begin{cases} 0 & (t \leq u_{k-1}) \\ \frac{(t-u_{k-1})^3}{6(u_k-u_{k-1})^2} & (u_{k-1} < t \leq u_k) \\ \frac{(u_k-u_{k-1})^2}{6} + \frac{(t-u_k)(t-u_{k-1})}{2} - \frac{(t-u_k)^3}{6(u_{k+1}-u_k)} & (u_k < t \leq u_{k+1}) \\ (u_{k+1} - u_{k-1}) \left(\frac{2u_{k+1}-u_k-u_{k-1}}{6} + \frac{t+u_{k+1}}{2} \right) & (u_{k+1} < t) \end{cases}$$

$k = m$ のとき,

$$B_k(t) = t.$$

割引係数 $Z(t)$ について, $Z(0) = 1$ でなければならないが, $B_k(t)$ の定義から $B_k(0) = 0$. したがって, 式 (2) より $Z(0) = 1$ は常に成り立つ.

式 (2) を式 (1) に代入すると,

$$\begin{aligned} P_\alpha + A_\alpha &= \sum_{j=1}^n c_{\alpha,j} Z(t_j) + \varepsilon_\alpha = \sum_{j=1}^n c_{\alpha,j} + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m w_k c_{\alpha,j} B_k(t_j) + \varepsilon_\alpha \\ &= \sum_{j=1}^n c_{\alpha,j} + \sum_{k=1}^m w_k \sum_{j=1}^n c_{\alpha,j} B_k(t_j) + \varepsilon_\alpha, \end{aligned} \quad (3)$$

となる. これより, 次式を得る.

$$P_\alpha + A_\alpha - \sum_{j=1}^n c_{\alpha,j} = \sum_{k=1}^m w_k \sum_{j=1}^n c_{\alpha,j} B_k(t_{\alpha,j}) + \varepsilon_\alpha. \quad (4)$$

式 (4) をベクトル, 行列を用いて記述すると,

$$\mathbf{P} + \mathbf{A} - \mathbf{C}\mathbf{1} = \mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{w} + \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (5)$$

となる. ここで, $\mathbf{1}$ は全ての成分が 1 である $N \times 1$ のベクトルである. また,

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} B_1(t_1) & \cdots & B_m(t_1) \\ \vdots & & \vdots \\ B_1(t_n) & \cdots & B_m(t_n) \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_N \end{pmatrix},$$

と置いている.

したがって, \mathbf{w} の最小二乗推定値 $\tilde{\mathbf{w}}$ は次式で与えられる.

$$\tilde{\mathbf{w}} = ((\mathbf{C}\mathbf{B})'(\mathbf{C}\mathbf{B}))^{-1}(\mathbf{C}\mathbf{B})'(\mathbf{P} + \mathbf{A} - \mathbf{C}\mathbf{1}).$$

2.3 B スプライン関数を基底関数とする方法

Steeley[12] では, 割引係数 $Z(t)$ を, 3 次 B スプライン関数 $B_k(t)$ の線形和で表している.

$$Z(t) = \sum_{k=1}^m w_k B_k(t). \quad (6)$$

3 次 B スプライン関数の節点は $u_1 < \cdots < u_4 = 0 < u_5 < \cdots < u_{m+3}$ と置かれる. D 次 B スプライン関数 $B_k^D(t)$ は再帰的に以下のように定義される.

$D = 1$ のとき,

$$B_k^D(t) = \begin{cases} 1 & (u_k \leq t \leq u_{k+1}) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$D > 1$ のとき,

$$B_k^D(t) = \frac{u_{D+k} - t}{u_{D+k} - u_{k+1}} B_{k+1}^{D-1}(t) + \frac{t - u_k}{u_{D+k-1} - u_k} B_k^{D-1}(t).$$

なお, 上式は de Boor の公式と呼ばれている (de Boor[3]). 本研究では, 式 (6) の $B_k(t)$ を $B_k(t) = B_k^3(t)$ とする.

また, $Z(0) = 1$ であることから, 式 (6) より係数 w には,

$$\sum_{k=1}^m w_k B_k(0) = 1, \quad (7)$$

との制約を課す必要がある. 式 (6) を式 (1) に代入すると,

$$P_\alpha + A_\alpha = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m w_k c_{\alpha,j} B_k(t_j) + \varepsilon_\alpha = \sum_{k=1}^m w_k \sum_{j=1}^n c_{\alpha,j} B_k(t_j) + \varepsilon_\alpha. \quad (8)$$

これより,

$$P_\alpha + A_\alpha = \sum_{k=1}^m w_k \sum_{j=1}^n c_{\alpha,j} B_k(t_j) + \varepsilon_\alpha. \quad (9)$$

式 (9) をベクトル, 行列を用いて記述すると,

$$\mathbf{P} + \mathbf{A} = \mathbf{CB}\mathbf{w} + \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (10)$$

となる. 式 (7) の制約条件は次式で与えられる.

$$\mathbf{B}(\mathbf{0})\mathbf{w} = \mathbf{1}. \quad (11)$$

ここで,

$$\mathbf{B}(\mathbf{0}) = \left(B_1(0), \dots, B_m(0) \right),$$

と置いている.

式 (10) と (11) による \mathbf{w} の推定は, 制約付き最小二乗法による推定の問題となる. $\mathbf{CB} = \mathbf{X}$ と置きこれを解くと, \mathbf{w} の最小二乗推定値 $\tilde{\mathbf{w}}$ は次式で与えられる (下式 I は単位行列である).

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{w}} = & \left(I - (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{0})'(\mathbf{B}(\mathbf{0})(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{0})')^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{0}) \right) (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'(\mathbf{P} + \mathbf{A}) \\ & + (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{0})'(\mathbf{B}(\mathbf{0})(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{0})')^{-1}. \end{aligned}$$

2.4 Fischer et al.[4] の方法: 瞬間フォワードレートをモデル化

t 年瞬間フォワードレートを $f(t)$ と置く. Fischer et al.[4] は,

$$f(t) = \sum_{k=1}^m w_k B_k(t), \quad (12)$$

として, $f(t)$ がスプライン関数の線形和で表されると仮定している.

式 (12) により, 債券価格は以下の式で表される.

$$\begin{aligned} P_\alpha + A_\alpha &= \sum_{j=1}^n c_{\alpha,j} \exp\left(-\int_0^{t_j} f(s)ds\right) + \varepsilon_\alpha \\ &= \sum_{j=1}^n c_{\alpha,j} \exp\left(-\sum_{k=1}^m w_k \int_0^{t_j} B_k(s)ds\right) + \varepsilon_\alpha \\ &= \sum_{j=1}^n c_{\alpha,j} \exp\left(-\sum_{k=1}^m w_k B_k^I(t_j)\right) + \varepsilon_\alpha. \end{aligned} \quad (13)$$

ここで,

$$B_k^I(t_j) = \int_0^{t_j} B_k(s)ds,$$

である.

さらに, 式 (13) の右辺第 1 項を

$$\sum_{j=1}^n c_{\alpha,j} \exp\left(-\sum_{k=1}^m w_k B_k^I(t_j)\right) \equiv \Pi_\alpha(\mathbf{w}),$$

と置き, $\mathbf{w} = \mathbf{w}^0$ の周りで $\Pi_\alpha(\mathbf{w})$ を線形化すると, 次式を得る.

$$\Pi_\alpha(\mathbf{w}) = \Pi_\alpha(\mathbf{w}^0) + \frac{\partial \Pi_\alpha(\mathbf{w})}{\partial \mathbf{w}'} \Big|_{\mathbf{w}=\mathbf{w}^0} (\mathbf{w} - \mathbf{w}^0). \quad (14)$$

式 (13) に上式 (14) を代入すると,

$$P_\alpha + A_\alpha = \Pi_\alpha(\mathbf{w}^0) + \frac{\partial \Pi_\alpha(\mathbf{w})}{\partial \mathbf{w}'} \Big|_{\mathbf{w}=\mathbf{w}^0} (\mathbf{w} - \mathbf{w}^0) + \varepsilon_\alpha,$$

を得る. これをベクトル表示すると,

$$\mathbf{P} + \mathbf{A} - \Pi(\mathbf{w}^0) + \frac{\partial \Pi(\mathbf{w}^0)}{\partial \mathbf{w}'} \mathbf{w}^0 = \frac{\partial \Pi(\mathbf{w}^0)}{\partial \mathbf{w}'} \mathbf{w} + \varepsilon, \quad (15)$$

となる. ここで, 式 (15) の $\mathbf{P} + \mathbf{A} - \Pi(\mathbf{w}^0) + \frac{\partial \Pi(\mathbf{w}^0)}{\partial \mathbf{w}'} \mathbf{w}^0$ を $\mathbf{Y}(\mathbf{w}^0)$, $\frac{\partial \Pi(\mathbf{w}^0)}{\partial \mathbf{w}'}$ を $\mathbf{X}(\mathbf{w}^0)$ と置くと, 式 (15) は次式のようにかける.

$$\mathbf{Y}(\mathbf{w}^0) = \mathbf{X}(\mathbf{w}^0) \mathbf{w} + \varepsilon. \quad (16)$$

したがって, \mathbf{w} の最小二乗推定値 $\tilde{\mathbf{w}}$ は, \mathbf{w}^0 を与えたとき,

$$\tilde{\mathbf{w}} = (\mathbf{X}(\mathbf{w}^0)' \mathbf{X}(\mathbf{w}^0))^{-1} \mathbf{X}(\mathbf{w}^0)' \mathbf{Y}(\mathbf{w}^0),$$

となる. $\mathbf{w}^0 = \tilde{\mathbf{w}}$ と \mathbf{w}^0 を更新したうえで, 再び上記の推定を行い, 得られた $\tilde{\mathbf{w}}$ を \mathbf{w}^0 と置く. この操作を繰り返し, $\tilde{\mathbf{w}}$ が収束したら操作を止める. このようにして得られる $\tilde{\mathbf{w}}$ が求める推定値となる. すなわち, 最適な $\tilde{\mathbf{w}}$ においては次式 (17) が成り立つ.

$$\tilde{\mathbf{w}} = (\mathbf{X}(\tilde{\mathbf{w}})' \mathbf{X}(\tilde{\mathbf{w}}))^{-1} \mathbf{X}(\tilde{\mathbf{w}})' \mathbf{Y}(\tilde{\mathbf{w}}). \quad (17)$$

3 平滑化スプライン法によるゼロクーポン金利推定

3.1 Fisher et al.[4] の方法

Fisher et al.[4] は, スプライン基底を 3 次 B スプライン関数とし, 式 (12) によって瞬間フォワードレートを表したうえで, 平滑化スプライン法によってゼロクーポン金利を推定する方法を提案した. 具体的には, ある \mathbf{w}^0 に対して式 (16) と同様に定義される $\mathbf{X}(\mathbf{w}^0)$ と $\mathbf{Y}(\mathbf{w}^0)$ について, 罰則付き残差平方和

$$(\mathbf{Y}(\mathbf{w}^0) - \mathbf{X}(\mathbf{w}^0) \mathbf{w})' (\mathbf{Y}(\mathbf{w}^0) - \mathbf{X}(\mathbf{w}^0) \mathbf{w}) + \lambda \mathbf{w}' \mathbf{G} \mathbf{w}, \quad (18)$$

の最小化に基づいて \mathbf{w} を推定するというものである. ここで, 式 (18) の第二項は, 下記の瞬間フォワードレートカーブの凹凸を測るもので, 同式第一項の残差平方和の罰則項として作用する.

$$\lambda \int_0^{t_n} (f''(s))^2 ds = \lambda \sum_{k,l} w'_k \left(\int_0^{t_n} B''_k(s) B''_l(s) ds \right) w_l \equiv \lambda \mathbf{w}' \mathbf{G} \mathbf{w}.$$

上式の \mathbf{G} は, 下記の $m \times m$ 行列 D_2 を用いて, $\mathbf{G} = D_2' D_2$ と近似される.

$$D_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

λ は平滑化パラメータと呼ばれ、瞬間フォワードレートカーブの凹凸を制御する役割を果たすパラメータである。推定において、平滑化パラメータを選択するための客観的な規準が必要となる。幾つかの規準に基づく平滑化パラメータの選択方法については次節で解説する。

平滑化パラメータ λ と \mathbf{w}^0 を固定した場合、式 (18) を最小化する $\mathbf{w} = \tilde{\mathbf{w}}$ は、

$$\tilde{\mathbf{w}} = (\mathbf{X}(\mathbf{w}^0)' \mathbf{X}(\mathbf{w}^0) + \lambda \mathbf{G})^{-1} \mathbf{X}(\mathbf{w}^0)' \mathbf{Y}(\mathbf{w}^0), \quad (19)$$

となる。平滑化パラメータ λ を固定した場合の最適な \mathbf{w} は次のような過程を踏んで計算される。適当な \mathbf{w}^0 の初期値に対して、式 (19) に則って $\tilde{\mathbf{w}}$ を計算し、これを改めて \mathbf{w}^0 と置き、式 (19) に再び代入・計算することで得られる $\tilde{\mathbf{w}}$ を \mathbf{w}^0 と置く、という操作を繰り返す。この操作により得られる \mathbf{w}^0 の収束値が最適値 $\tilde{\mathbf{w}}$ である。すなわち、最適な $\tilde{\mathbf{w}}$ においては、

$$\tilde{\mathbf{w}} = (\mathbf{X}(\tilde{\mathbf{w}})' \mathbf{X}(\tilde{\mathbf{w}}) + \lambda \mathbf{G})^{-1} \mathbf{X}(\tilde{\mathbf{w}})' \mathbf{Y}(\tilde{\mathbf{w}}), \quad (20)$$

が成り立つ。式 (20) の $\tilde{\mathbf{w}}$ は λ に依存して決定されている点に注意が必要である。以下では、この点を明示するために $\tilde{\mathbf{w}}(\lambda)$ と記す場合がある。

3.2 平滑化パラメータ λ の選択法

平滑化スプライン法では、平滑化パラメータ λ を選択する必要があるが、先行研究では幾つかの客観的な選択規準が示されている。本節では、一般化交差検証による方法、一般化情報量規準による方法、ノンパラメトリック法に基づく規準に従って選択する方法をそれぞれ説明する。

3.2.1 一般化交差検証 (GCV) による選択法

Craven and Wahba[2] は、曲線の推定を平滑化スプライン法で行う際、一般化交差検証 (GCV) による平滑化パラメータの選択規準を提案した。Fischer et al.[4] は、GCV で平滑化パラメータを選択する平滑化スプライン法に基づき、ゼロクーポン金利を推定する方法を提案した。

式 (20) を満たす $\tilde{\mathbf{w}}(\lambda)$ に対して、 $A(\tilde{\mathbf{w}}(\lambda), \lambda) = \mathbf{X}(\tilde{\mathbf{w}}(\lambda))(\mathbf{X}(\tilde{\mathbf{w}}(\lambda))' \mathbf{X}(\tilde{\mathbf{w}}(\lambda)) + \lambda \mathbf{G})^{-1} \mathbf{X}(\tilde{\mathbf{w}}(\lambda))'$ と置くと、GCV は以下のように定義される。

$$\text{GCV}(\lambda) = \frac{((I - A(\tilde{\mathbf{w}}(\lambda), \lambda)) \mathbf{Y}(\tilde{\mathbf{w}}(\lambda)))' ((I - A(\tilde{\mathbf{w}}(\lambda), \lambda)) \mathbf{Y}(\tilde{\mathbf{w}}(\lambda)))}{(N - \text{Tr}(A(\tilde{\mathbf{w}}(\lambda), \lambda)))^2}.$$

ここで、 I は $N \times N$ の単位行列、 $\text{Tr}(S)$ は行列 S の対角和を表す。平滑化パラメータは、GCV が最小値をとる λ として選択される。

3.2.2 一般化情報量規準 (GIC) による選択法

Konishi and Kitagawa[7] は、モデル選択のための客観的な基準として、一般化情報量規準 (Generalized Information Criteria; GIC) を提案した。赤池情報量規準 (Akaike Information Criteria; AIC, Akaike[1]) は、同じくモデル選択のための情報量規準であるが、その適用は最尤法による推定法に限定される。しかし、GIC は、より一般的な推定法に対しても適用が可能である。川崎・安道 [15] は、ゼロクーポン金利を平滑化法に基づき推定する際に、GIC による平滑化パラメータ λ の選択法を提案し、同手法の下で日本国債のゼロクーポン金利の推定を行った。また、阿部他 [14] も、同様の方法で日本国債のゼロクーポン金利の推定を行った。

3.1 節で示したように, Fischer et al.[4] は, 罰則付き最小二乗法によりパラメータの推定を行った. 一方, 川崎・安道 [15] は, 以下に示すような罰則付き最尤法によりパラメータの推定を行った. 川崎・安道 [15] では, 割引係数をガウス型動径基底関数の線形和で表すモデル化が行われているが, 本小節では, 基底関数を 3 次 B スプライン関数とし, 瞬間フォワードレートを式 (12) によって表すモデルを仮定し, GIC による平滑化パラメータの選択方法について解説する.

まず, 式 (16) の ε の各成分は, 互いに独立な期待値 0, 分散 σ^2 の正規分布に従うと仮定する. すると, 対数尤度 $l(\mathbf{w}, \sigma^2)$ は,

$$l(\mathbf{w}, \sigma^2) = -\frac{N}{2} \log(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} (\mathbf{Y}(\mathbf{w}^0) - \mathbf{X}(\mathbf{w}^0)\mathbf{w})' (\mathbf{Y}(\mathbf{w}^0) - \mathbf{X}(\mathbf{w}^0)\mathbf{w}), \quad (21)$$

となる. 式 (21) に瞬間フォワードレートカーブの凹凸に伴う罰則項を加味した罰則付き対数尤度関数

$$-\frac{N}{2} \log(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} (\mathbf{Y}(\mathbf{w}^0) - \mathbf{X}(\mathbf{w}^0)\mathbf{w})' (\mathbf{Y}(\mathbf{w}^0) - \mathbf{X}(\mathbf{w}^0)\mathbf{w}) - \frac{\lambda}{2} \mathbf{w}' \mathbf{G} \mathbf{w}. \quad (22)$$

を最大化するパラメータを求める. \mathbf{w}^0 を 1 つ与えた時, パラメータの推定値 $\tilde{\mathbf{w}}$, $\tilde{\sigma}^2$ は,

$$\tilde{\mathbf{w}} = (\mathbf{X}(\mathbf{w}^0)' \mathbf{X}(\mathbf{w}^0) + \lambda \mathbf{G} \tilde{\sigma}^2)^{-1} \mathbf{X}(\mathbf{w}^0)' \mathbf{Y}(\mathbf{w}^0), \quad (23)$$

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{N} (\mathbf{Y}(\mathbf{w}^0) - \mathbf{X}(\mathbf{w}^0)\tilde{\mathbf{w}})' (\mathbf{Y}(\mathbf{w}^0) - \mathbf{X}(\mathbf{w}^0)\tilde{\mathbf{w}}), \quad (24)$$

となる. ここで, 式 (23) は $\tilde{\sigma}^2$ に依存しており, 式 (24) は $\tilde{\mathbf{w}}$ に依存している点に注意が必要である. 計算過程は, まず, $\tilde{\sigma}^2$ と \mathbf{w}^0 の初期値を与えたうえで, 式 (23) から $\tilde{\mathbf{w}}$ を計算する. そして, 得られた $\tilde{\mathbf{w}}$ と \mathbf{w}^0 を式 (24) に代入し, 新たな $\tilde{\sigma}^2$ を計算する. このように得られた $\tilde{\mathbf{w}}$ を \mathbf{w}^0 と置き, 同様の計算を繰り返す. この過程を経て得られる \mathbf{w}^0 の収束値が, 推定されるべき $\tilde{\mathbf{w}}$ となる. $\tilde{\sigma}^2$ の推定値は, 式 (24) に収束値 $\mathbf{w}^0 = \tilde{\mathbf{w}}$ を代入して得られる値となる. このような方法で得られる \mathbf{w} の最適値を $\tilde{\mathbf{w}}$ とすると,

$$\tilde{\mathbf{w}} = (\mathbf{X}(\tilde{\mathbf{w}})' \mathbf{X}(\tilde{\mathbf{w}}) + \lambda \mathbf{G} \tilde{\sigma}^2)^{-1} \mathbf{X}(\tilde{\mathbf{w}})' \mathbf{Y}(\tilde{\mathbf{w}}),$$

が成り立ち, 分散の推定値 $\tilde{\sigma}^2$ は, 以下のように計算される.

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{N} (\mathbf{Y}(\tilde{\mathbf{w}}) - \mathbf{X}(\tilde{\mathbf{w}})\tilde{\mathbf{w}})' (\mathbf{Y}(\tilde{\mathbf{w}}) - \mathbf{X}(\tilde{\mathbf{w}})\tilde{\mathbf{w}}).$$

上記のように \mathbf{w} の最適値 $\tilde{\mathbf{w}}$ が得られているとし, 平滑化パラメータ λ を選択する情報量規準 GIC を以下で定義する. そのために, あらかじめ以下の記号を準備しておく.

$$\begin{aligned} \Lambda &:= \text{diag}(((I - A(\tilde{\mathbf{w}}, \lambda))\mathbf{Y}(\tilde{\mathbf{w}}))), \quad \mathbf{p} := \Lambda^2 \mathbf{1} / (2\tilde{\sigma}^4) - \mathbf{1} / (2\tilde{\sigma}^2), \\ K &:= \frac{1}{N\tilde{\sigma}^2} \begin{pmatrix} \mathbf{X}(\tilde{\mathbf{w}})' \Lambda - \lambda \mathbf{G} \tilde{\mathbf{w}} \mathbf{1}' / N \\ \mathbf{p}' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda \mathbf{X}(\tilde{\mathbf{w}}) & \tilde{\sigma}^2 \mathbf{p} \end{pmatrix}, \\ L &:= \frac{1}{N\tilde{\sigma}^2} \begin{pmatrix} \mathbf{X}(\mathbf{w})' \mathbf{X}(\tilde{\mathbf{w}}) + \tilde{\sigma}^2 \lambda \mathbf{G} & \mathbf{X}(\tilde{\mathbf{w}})' \Lambda \mathbf{1} / \tilde{\sigma}^2 \\ \mathbf{1}' \Lambda \mathbf{X}(\tilde{\mathbf{w}}) / \tilde{\sigma}^2 & N / (2\tilde{\sigma}^2) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

ここで, $\text{diag}(S)$ は, ベクトル S の各成分を対角成分とする対角行列を表す.

このとき, 一般化情報量規準 GIC は, 次のように定義される.

$$\text{GIC}(\lambda) = -2l(\tilde{\mathbf{w}}, \tilde{\sigma}^2) + 2\text{Tr}(KL^{-1}) = N \log(2\pi\tilde{\sigma}^2) + N + 2\text{Tr}(KL^{-1}).$$

最適な平滑化パラメータは, GIC が最小値をとる λ として選択される.

3.2.3 Empirical Bias Bandwidth Selection による選択法

Jarrow et al.[6] は、平滑化スプライン法によるゼロクーポン金利推定に際し、Ruppert[11] が提案したノンパラメトリック法に基づく平滑化パラメータの選択規準である EBBS 法 (Empirical Bias Bandwidth Selection; EBBS) を用いることを提案した。この方法では、推定される瞬間フォワードレートの平均二乗誤差 (Mean Squared Error; MSE) を最小化するように平滑化パラメータが選択される。

Jarrow et al.[6] は、Fisher et al.[4] と同様に、式 (18) の最小化によりパラメータ \mathbf{w} を推定している。このとき、 \mathbf{w} の推定値 $\tilde{\mathbf{w}}$ は、

$$0 = \frac{\partial}{\partial \mathbf{w}} \{(\mathbf{Y}(\tilde{\mathbf{w}}) - \mathbf{X}(\tilde{\mathbf{w}})\mathbf{w})'(\mathbf{Y}(\tilde{\mathbf{w}}) - \mathbf{X}(\tilde{\mathbf{w}})\mathbf{w}) + \lambda \mathbf{w}'\mathbf{G}\mathbf{w}\} |_{\mathbf{w}=\tilde{\mathbf{w}}} \equiv 2 \sum_{\alpha=1}^N \psi_{\alpha}(\tilde{\mathbf{w}}, \lambda), \quad (25)$$

を満たす値として定まる。ここで、

$$\psi_{\alpha}(\tilde{\mathbf{w}}, \lambda) = -(P_{\alpha} + A_{\alpha} - \Pi_{\alpha}(\tilde{\mathbf{w}})) \frac{\partial \Pi_{\alpha}}{\partial \tilde{\mathbf{w}}} + \frac{\lambda}{N} \mathbf{G}\tilde{\mathbf{w}},$$

と置いている。

上述の通り、EBBS では推定値の MSE を最小化するような平滑化パラメータを選択する。Jarrow et al.[6] では、瞬間フォワードレートの MSE を最小化する平滑化パラメータ λ を選択している。MSE が分散とバイアスの 2 乗の和と等しいことを踏まえ、Jarrow et al.[6] は、瞬間フォワードレートの分散とバイアスのそれぞれを、以下に示す方法によって計算することで MSE を求めるという方法を取った。

まず、推定値 $\tilde{\mathbf{w}}$ の漸近分散共分散行列 $Var(\tilde{\mathbf{w}})$ は、サンドイッチ公式により、

$$Var(\tilde{\mathbf{w}}(\lambda)) = \hat{E} \left[\frac{\partial \psi_{\alpha}}{\partial \mathbf{w}'} \right]^{-1} \hat{E} \left[\psi_{\alpha} \psi_{\alpha}' \right] \hat{E} \left[\frac{\partial \psi_{\alpha}}{\partial \mathbf{w}'} \right]^{-1} = \sigma^4 (\Sigma + \lambda \mathbf{G})^{-1} \Sigma (\Sigma + \lambda \mathbf{G})^{-1}, \quad (26)$$

である。ここで、 \hat{E} は経験分布による期待値オペレータである。また、

$$\Sigma = \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{w}'} \right)' \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{w}'}, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{w}} = \left(\frac{\partial \Pi_1}{\partial \mathbf{w}} \quad \dots \quad \frac{\partial \Pi_N}{\partial \mathbf{w}} \right),$$

と置いている。

式 (12), (26) より、瞬間フォワードレートの分散 $Var(\hat{f}(t, \lambda))$ は、

$$Var(\hat{f}(t, \lambda)) = Var(\mathbf{B}'(\mathbf{t})\tilde{\mathbf{w}}(\lambda)) = \sigma^4 \mathbf{B}'(\mathbf{t}) (\Sigma + \lambda \mathbf{G})^{-1} \Sigma (\Sigma + \lambda \mathbf{G})^{-1} \mathbf{B}(\mathbf{t}),$$

となる。ここで、 $\mathbf{B}(\mathbf{t}) = (B_1(t), \dots, B_m(t))'$ である。

次に、瞬間フォワードレートのバイアス $Bias(\hat{f}(t, \lambda))$ を推定する方法を示す。Ruppert[11] が提案した方法に則ると、 $Bias(\hat{f}(t, \lambda))$ は、ある関数 $\gamma(t)$ を用いて $\gamma(t)\lambda$ と 1 次近似される。したがって、瞬間フォワードレートのバイアスを求めることは、 $\gamma(t)$ を推定することに帰着される。 $\gamma(t)$ の推定は、以下に示す手順を踏む。

1. $\lambda_1 < \dots < \lambda_L$ について、 $\hat{f}(t, \lambda_l)$ ($l = 1, \dots, L$) を計算する。
2. $(\lambda_l, \hat{f}(t, \lambda_l))$ ($l = 1, \dots, L$) に対して単回帰推定を行う。
3. 推定される回帰直線の傾きを $\tilde{\gamma}(t)$ と置く。

上述の $\hat{\gamma}(t)$ を用いると、バイアス $Bias(\hat{f}(t, \lambda_i))$ の推定値は $\hat{\gamma}(t)\lambda_i$ となる。

以上の方法により求められる瞬間フォワードレートの分散とバイアスの 2 乗の和を取ることによって、満期 t での瞬間フォワードレートの平均二乗誤差 $MSE(\hat{f}(t, \lambda))$ が得られる。平滑化パラメータは、幾つかの満期 $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_M$ に対する $MSE(\hat{f}(t_j, \lambda))$, ($j = 1, \dots, M$) の平均値を最小化する λ を選択する。

4 日本国債のゼロクーポン金利の推定

4.1 使用データ・分析方法

以下の分析では、日本証券業協会が「売買参考統計値」として公表している、2, 5, 10, 20, 30 年の日本の固定利付国債の日次価格データを使用する。なお、同データは、日経 NEEDS FinancialQuest から取得する。分析に用いるデータの期間は、2007 年 1 月 4 日～2018 年 3 月 7 日の 2739 営業日とする。各営業日における推定では、発行済みの国債全銘柄の価格データを用いるが、償還が間近に迫る期近債の市場流動性は一般的に低下していることを考慮し、償還まで 40 日（非営業日を含む）未満の銘柄はデータから除外した。利率や償還日といった銘柄の属性情報は、財務省のホームページから取得した。

本研究の目的は、QQE 導入以降の超低金利局面におけるゼロクーポン金利推定手法の精度や安定性を検証することにある。したがって、推定結果を分析する際、「QQE 以前」と「QQE 以降」に期間を分けて結果を集計する。前者の期間を 2007 年 1 月 4 日～2013 年 4 月 3 日、後者の期間を 2013 年 4 月 4 日～2018 年 3 月 7 日とする。また、「QQE 以降」でも、マイナス金利付き QQE 政策が始まった 2016 年 2 月以降は、マイナスイールドカーブが常態化するなど、日本国債市場は前例のない特殊な環境にある。そこで、2016 年 2 月 1 日～2018 年 3 月 7 日の期間を「マイナス金利期間」として推定結果の集計期間の 1 つとする。

分析の柱は、スプライン回帰法に基づく推定と平滑化スプライン法に基づく推定の 2 本からなる。スプライン回帰法に基づく推定においては、2.2 節で解説した McCulloch[9] の方法と、2.3 節で解説した Steeley[12] による B スプライン基底関数に基づく方法について、ゼロクーポン金利の推定を行う³。簡単のため、以降、前者の方法を「MS 法」、後者の方法を「BS 法」と呼ぶ。分析の観点からは、市場価格への適合度、ゼロクーポンカーブの凹凸度である。さらに、「QQE 以前」と「QQE 導入以降の一部の期間」については、推定金利の非負性が維持されているのかどうかの検証も行う。

市場価格への適合度は、下記式 (27) で示す平方平均二乗誤差率 (Root Mean Squared Percentage Error; 以下 RMSPE と記す場合がある) で計測する。

$$\sqrt{\frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N \left(\frac{\tilde{P}_{\alpha} - P_{\alpha}}{P_{\alpha}} \right)^2}. \quad (27)$$

ここで、 \tilde{P}_{α} は銘柄 α に対応する価格の推定値である。

営業日 i における凹凸度は、

$$\sqrt{\frac{1}{298} \sum_{k=1}^{298} (2y_i(0.1(k+1)) - y_i(0.1(k+2)) - y_i(0.1k))^2}, \quad (28)$$

³川崎・安道 [15] の方法（割引係数を構成する基底関数をガウス型動径関数とする推定）は、最尤法により推定を行う必要があり、スプライン回帰法に比べてパラメータ推定に時間を要する。このため、本研究では分析の対象から除外した。

で評価する。ここで、 $y_i(l)$ は、営業日 i における年限 l 年のゼロクーポン金利を表す。

推定するゼロクーポン金利の対象年限を 0 年超 30 年以下とするが、MS 法、BS 法双方のスプライン基底関数の数と節点の配置を完全に一致させることはできない。そこで、満期 0 年超 30 年以下の範囲で、両手法の基底関数の数のみが一致するように、それぞれの手法で節点を配置する。

分析の 2 本目の柱である平滑化スプライン法による推定については、3.1 節で説明した Fischer et al.[4] によるモデルに基づき分析を行う。その際、平滑化パラメータを GCV, GIC, EBBS の 3 つの規準で選択する。各々の選択規準に則って推定されるゼロクーポンカーブと瞬間フォワードレートカーブについて、各営業日での凹凸度と凹凸度の時間変化の観点で比較を行う。さらに、「QQE 以前」と「QQE 導入以降の一部の期間」については、推定されるゼロクーポン金利の非負性が維持されているのかどうかの検証も行う。

第 i 営業日におけるゼロクーポンカーブの凹凸度は、式 (28) で評価する。第 i 営業日における瞬間フォワードレートカーブの凹凸度は、

$$\sqrt{\frac{1}{298} \sum_{k=1}^{298} (2f_i(0.1(k+1)) - f_i(0.1(k+2)) - f_i(0.1k))^2}, \quad (29)$$

で計測する。ここで、 $f_i(l)$ は、営業日 i における年限 l 年の瞬間フォワードレートを表す。

凹凸度の時間変化は、同一の推定手法を、金融実務や経済分析のため持続的に利用する場合の時間方向での安定性を評価するものである。第 $i-1$ 営業日と第 i 営業日の間のゼロクーポンカーブの凹凸度の時間変化を、下式 (30) で評価する。

$$\sqrt{\frac{1}{298} \sum_{k=1}^{298} (2\Delta_i y(0.1(k+1)) - \Delta_i y(0.1(k+2)) - \Delta_i y(0.1k))^2}. \quad (30)$$

ここで、 $\Delta_i y(l) = y_i(l) - y_{i-1}(l)$ である。

第 $i-1$ 営業日と第 i 営業日の間の瞬間フォワードレートカーブの凹凸度の時間変化を、下式 (31) で評価する。

$$\sqrt{\frac{1}{298} \sum_{k=1}^{298} (2\Delta_i f(0.1(k+1)) - \Delta_i f(0.1(k+2)) - \Delta_i f(0.1k))^2}. \quad (31)$$

ここで、 $\Delta_i f(l) = f_i(l) - f_{i-1}(l)$ である。

4.2 スプライン回帰法によるゼロクーポン金利の推定結果

4.2.1 基底関数の数が 18 個となるように節点を設定した場合

本小節では、基底関数の数が 18 個となるように節点を配置する。MS 法では、 $u_k = \frac{30(k-1)}{17}$ ($k = 1, \dots, 18$) と節点を配置する。BS 法では、 $u_k = k - 4$ ($k = 1, 2, 3$), $u_k = 2k - 8$ ($k = 4, \dots, 19$), $u_k = k + 11$ ($k = 20, 21, 22$) と節点を配置する。

MS 法と BS 法で推定した主要年限のゼロクーポン金利を図 2 にプロットした。

図 3 は、各営業日における両手法の平方平均二乗誤差率 (RMSPE) をプロットしたものである。図 3 からは、両手法間で推定誤差に顕著な差は見られないことが確認できる。両手法とも 2008 年の金融市場の混乱時に RMSPE が約 0.2% の水準まで拡大したが、それ以外の時期については RMSPE は 0.15% 以内に収まった。

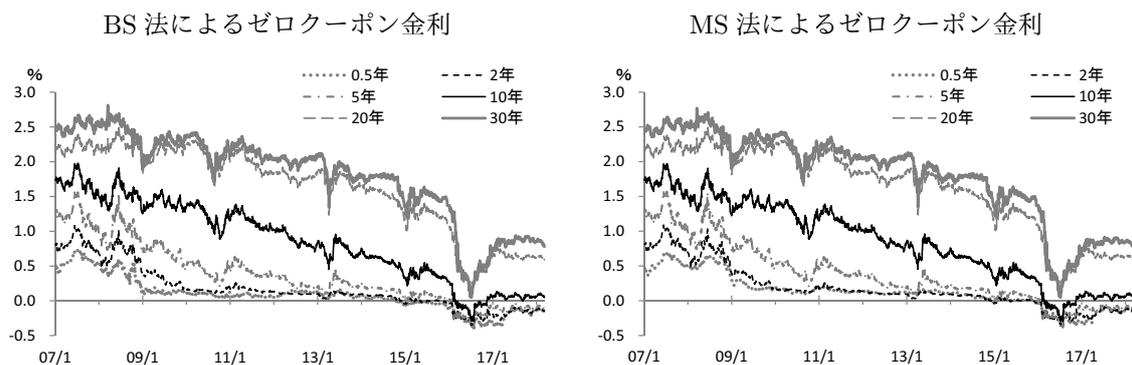


図 2: 主要年限ゼロクーポン金利の推定値

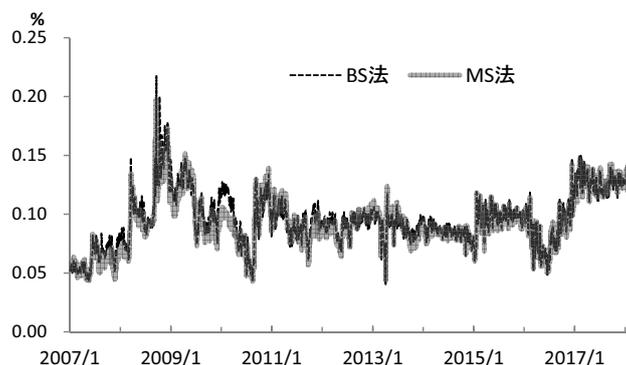


図 3: 平均平方二乗誤差率

表 1: 債券価格との適合性 (RMSPE, 単位: %)

	QQE 以前		QQE 以降		マイナス金利期間	
	BS 法	MS 法	BS 法	MS 法	BS 法	MS 法
平均	0.0941	0.0902	0.0982	0.0974	0.108	0.108
標準偏差	0.0244	0.0239	0.0194	0.0200	0.0246	0.0249
最大	0.217	0.198	0.150	0.147	0.150	0.147

(注) 「QQE 以前」は 2007/1/4~2013/4/3. 「QQE 以降」は 2013/4/4~2018/3/7.

「マイナス金利期間」は 2016/2/1~2018/3/7.

「QQE 以前」, 「QQE 以降」, 「マイナス金利期間」のそれぞれの時期について, RMSPE の平均, 標準偏差, 最大値を集計したものが表 1 である. これを見ると, MS 法が BS 法と比べて, 幾分高い適合度を示していることが分かる⁴. 推定時期に応じた適合度の違いを見ると, QQE 導入以降は QQE 導入以前と比べて, RMSPE が平均で見ても拡大している. さらに, マイナス金利期間については, それ以外の時期と比べて RMSPE が平均で見ても大きな値を示している. 但し, QQE 以降 (マイナス金利期間) の RMSPE の水準は, 上述の通り高々 0.15% であり, 推定上問題視するほどのものではないと考えられる.

QQE 導入以降の RMSPE の拡大要因を確かめるため, 横軸を残存年数, 縦軸を BS 法に基づく各銘柄の価格誤差率とする散布図を図 4 に示した. 図を見ると, 2007 年 1 月 4 日の推定誤差

⁴ 菊池・新谷 [16] は, BS 法が MS 法よりも僅かに高い適合度を有するとの結果を得ている. 但し, 同論文では, 両手法における節点の配置を同一にしており, 本研究の節点の配置方法と異なる. したがって, 同論文と本論文の結論を一概に比較できない点には留意する必要がある.

率（丸印）は±0.2%の範囲に収まっており、どの年限で見ても推定精度が高いことを示している。一方、金融市場が混乱した2008年9月17日とQQE導入以降の2018年3月7日の推定誤差率（四角印、三角印）については、誤差が大きな銘柄が散見される。但し、両日間でその特徴は異なる。2008年9月17日の方は、5年超10年未満の残存年数の銘柄の推定誤差率が高水準を示す一方で、2018年3月7日の方は、残存年数が15年超25年未満の銘柄で推定誤差率が高水準を示す銘柄が多い。また、2018年3月7日の結果は、残存年数30年に近い銘柄で高い誤差率を示す銘柄も存在している。QQEの導入以降、ここで示した2018年3月7日以外の営業日においても、残存年数が15年を超える銘柄の推定誤差率が高水準を示す傾向が見られた。

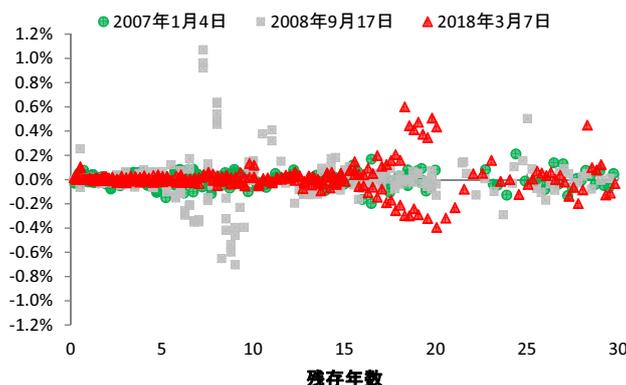


図 4: 銘柄の推定誤差率の比較

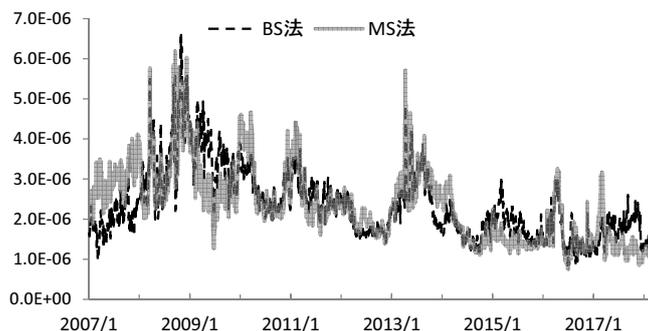


図 5: ゼロクーポンカーブの凹凸度

次に、推定されたゼロクーポンカーブの凹凸度についてみる。図5は、期間中の凹凸度の推移をプロットしたものである。表2は、QQE以前、QQE以降、マイナス金利期間のそれぞれについて、凹凸度の平均値、標準偏差、最大値をまとめたものである。

表 2: 推定されたゼロクーポンカーブの凹凸度

	QQE 以前		QQE 以降		マイナス金利期間	
	BS 法	MS 法	BS 法	MS 法	BS 法	MS 法
平均	2.71×10^{-6}	2.71×10^{-6}	1.89×10^{-6}	1.78×10^{-6}	1.66×10^{-6}	1.49×10^{-6}
標準偏差	8.85×10^{-7}	7.87×10^{-7}	5.88×10^{-7}	7.26×10^{-7}	4.20×10^{-7}	5.24×10^{-7}
最大値	6.57×10^{-6}	6.19×10^{-6}	4.83×10^{-6}	5.72×10^{-6}	3.03×10^{-6}	3.26×10^{-6}

表2を見ると、QQE以降の凹凸は、QQE以前と比べ平均的に見て抑制されている。MS法とBS法の結果を比較すると、QQE以前とQQE以降の期間については両手法間に大きな差は見

られない。しかし、マイナス金利期間では、両手法の凹凸度の中に差が生じ、BS法による凹凸度がMS法を上回る格好となっている。

図5を見ると、MS法、BS法とも凹凸度が過度になった日が見られる、QQE導入以降に焦点を絞ると、MS法、BS法とも、凹凸度が最大値を示したのは2013年4月10日の推定値である。同日の推定ゼロクーポンカーブを示したのが図6である。同図からは両手法とも短期の年限で「スプーン」の形状を取っており、このことが凹凸を大きくさせている。

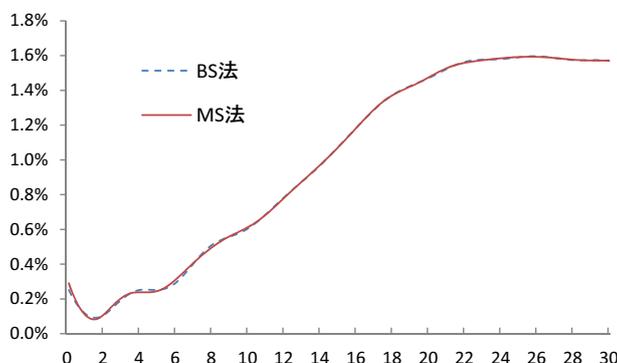


図 6: 2013年4月10日のゼロクーポンカーブ

図5からは、MS法とBS法の間で度々凹凸度に差が生じていることも見て取れる。マイナス金利期間中にBS法とMS法の凹凸度の差が広がった日の1つが2017年2月22日である。同日は、MS法の凹凸度がBS法の凹凸度を大きく上回った日である。図7に同日のゼロクーポンカーブを示した。短期の年限で、MS法の推定カーブがスプーンの形状を取ったため、凹凸度が大きくなったと考えられる。

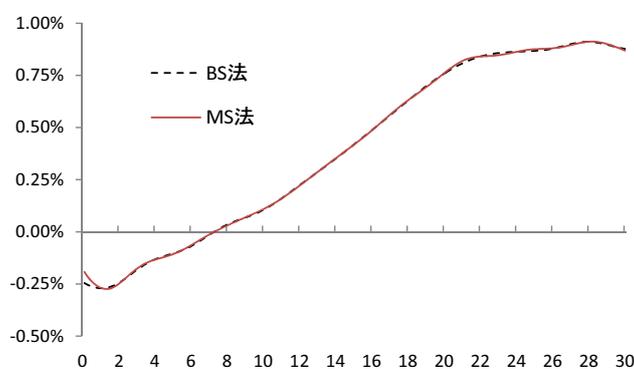


図 7: 2017年2月22日のゼロクーポンカーブ

マイナス金利期間中に、BS法による凹凸度がMS法による凹凸度を上回る形で差が広がった営業日の1つが2017年9月5日である。図8に同日のゼロクーポンカーブを示した。両手法による違いは年限30年付近に現れている。BS法の推定カーブの方が、年限30年付近で凹凸が大きくなっていることが見て取れる。BS法による推定では、図8のように、年限30年付近の凹凸が大きくなる日が、2017年9月5日以外にも見られた。

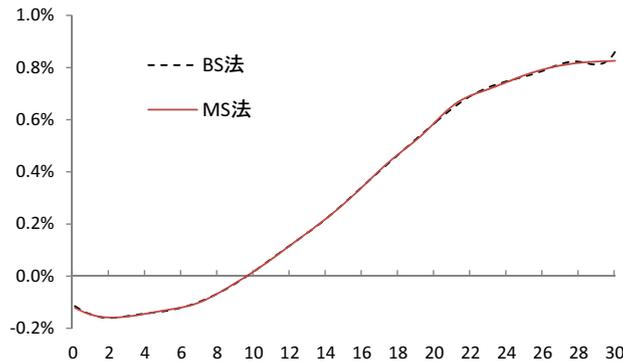


図 8: 2017 年 9 月 5 日のゼロクーポンカーブ

マイナス金利が常態化した 2016 年 2 月以前にも金融市場ではマイナス金利が散見されていた。日本銀行金融市場局 [18] は、2014 年 9 月に国庫短期証券の金利が初めてマイナス化したと指摘している。したがって、固定利付国債の価格から推定される短期の年限のゼロクーポン金利が負の値を取っていたとしても不思議ではない。裏を返せば、2014 年 9 月以前は、固定利付国債のゼロクーポン金利の非負性は維持されていた蓋然性が高い。そこで、2007 年 1 月 4 日～2014 年 8 月 29 日までの 1879 営業日で、0.1 年～30 年金利までの年限 0.1 年刻み、300 の年限のゼロクーポン金利に対して、MS 法、BS 法のそれぞれで負値を取った数を集計した。その結果、いずれの方法とも該当する金利がゼロを下回った数は皆無であることが確認された。

以上、本小節で得られた結果をまとめると次の通りである。本小節での節点の配置においては、① 価格適合度は MS 法が BS 法を僅かに上回ること、② 価格適合度は、QQE 以前に比べて QQE 以降に若干悪化していること、③ その要因は QQE 導入以降、15 年超の年限の銘柄での推定誤差率が高水準となっていること、④ ゼロクーポンカーブの凹凸度は BS 法、MS 法の間で度々差が生じていること、⑤ マイナス金利期間中、BS 法での推定カーブは年限 30 年付近の凹凸度がしばしば大きくなることが分かった。

4.2.2 基底関数の数が 13 個となるように節点を設定した場合

本小節では、基底関数の数が 13 個となるように節点を配置する。MS 法では、 $u_k = \frac{30(k-1)}{12}$ ($k = 1, \dots, 13$)、BS 法では、 $u_k = k - 4$ ($k = 1, 2, 3$)、 $u_k = 3k - 12$ ($k = 4, \dots, 14$)、 $u_k = k + 16$ ($k = 15, 16, 17$) と節点をとる。

MS 法と BS 法で推定した主要年限のゼロクーポン金利を図 9 にプロットした。

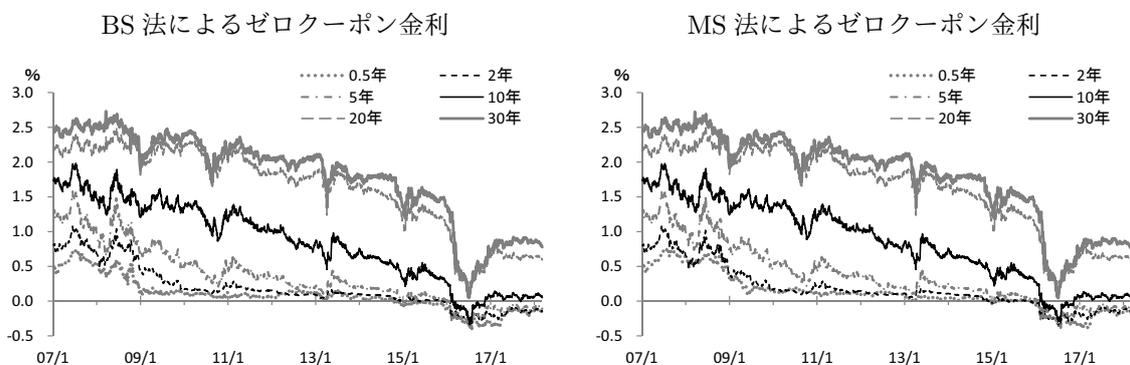


図 9: 主要年限ゼロクーポン金利の推定値

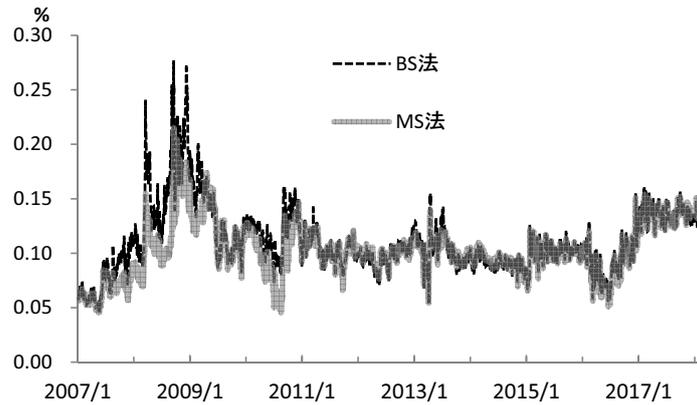


図 10: 平均平方二乗誤差率

図 10 は、両手法の RMSPE を各営業日についてプロットしたものである。図 10 は、前小節の図 3 で見られた傾向と大きな違いはない。両手法とも 2008 年の金融市場の混乱時に RMSPE が拡大したが、それ以外の時期については RMSPE は概ね 0.15% 以内に収まった。

両手法による価格適合度を期間毎にまとめたのが表 3 である。QQE 以降とマイナス金利期間については、平均的に見て RMSPE に殆ど違いはない。期間中の最大値も両手法間で微差となった。しかし、QQE 以前は RMSPE の差は両手法間で大きく、MS 法の精度が BS 法を上回る結果となった。

表 3: 債券価格との適合性 (RMSPE, 単位: %)

	QQE 以前		QQE 以降		マイナス金利期間	
	BS 法	MS 法	BS 法	MS 法	BS 法	MS 法
平均	0.114	0.101	0.106	0.105	0.116	0.114
標準偏差	0.0349	0.0269	0.0206	0.0207	0.0255	0.0271
最大	0.275	0.215	0.161	0.154	0.161	0.154

次に、凹凸度についてみる。図 11 は、凹凸度の推移をプロットしたものである。これを見ると、MS 法により推定されたゼロクーポンカーブの凹凸度が、BS 法の凹凸度を上回る日が散見される。

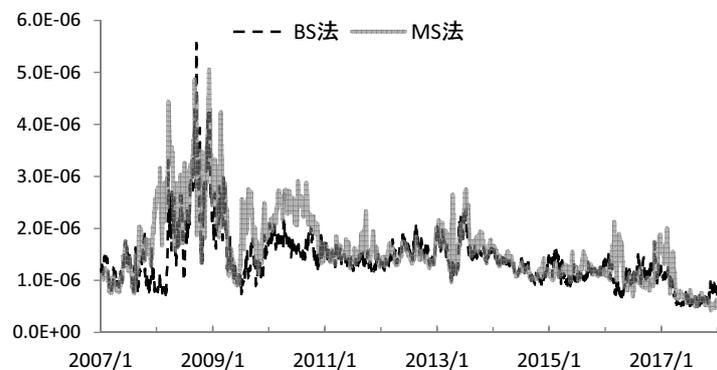


図 11: ゼロクーポンカーブの凹凸度

表 4: 推定されたゼロクーポンカーブの凹凸度

	QQE 以前		QQE 以降		マイナス金利期間	
	BS 法	MS 法	BS 法	MS 法	BS 法	MS 法
平均	1.58×10^{-6}	1.89×10^{-6}	1.14×10^{-6}	1.19×10^{-6}	9.03×10^{-7}	9.53×10^{-7}
標準偏差	5.59×10^{-7}	6.78×10^{-7}	3.27×10^{-7}	4.12×10^{-7}	2.52×10^{-7}	3.95×10^{-7}
最大値	5.54×10^{-6}	5.06×10^{-6}	2.36×10^{-6}	2.75×10^{-6}	1.72×10^{-6}	2.13×10^{-6}

表 4 は、QQE 以前、QQE 以降、マイナス金利期間の凹凸度の平均値、標準偏差、最大値をまとめたものである。これを見ると、凹凸度の平均値、標準偏差は、どの期間で見ても MS 法が BS 法を上回っている。期間中の最大値も、QQE 導入以降、マイナス金利期間では MS 法が BS 法を上回る結果となった。

QQE 導入以降の期間について、両手法によるゼロクーポンカーブの凹凸度の差が最大となった営業日は 2013 年 4 月 12 日である。MS 法によるゼロクーポンカーブの推定値の凹凸度が、BS 法による凹凸度を上回る格好となった。図 12 に同営業日におけるゼロクーポンカーブを示した。

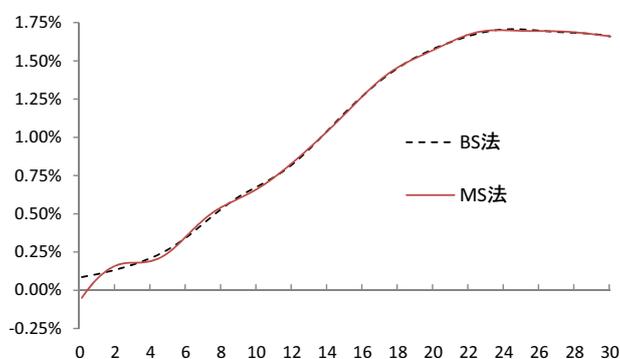


図 12: 2013 年 4 月 12 日のゼロクーポンカーブ

これを見ると、MS 法による推定カーブは、短期の年限で凹凸が大きくなっている。また、0.1 年～0.4 年のゼロクーポン金利で MS 法による推定値が負の値を取った。2013 年 4 月 12 日は、QQE 導入直後であり、当該年限のゼロクーポン金利の推定値が負値を取るとは考えにくい。したがって、当該営業日においては、BS 法による推定値が妥当といえる。マイナス金利が市場で散見されるようになる以前に、MS 法や BS 法による推定値が負値を取る問題については後述する。

次に、QQE 以降の期間で、BS 法によるゼロクーポンカーブの推定値の凹凸度が最大となった 2013 年 6 月 25 日のゼロクーポンカーブを見てみる（図 13）。

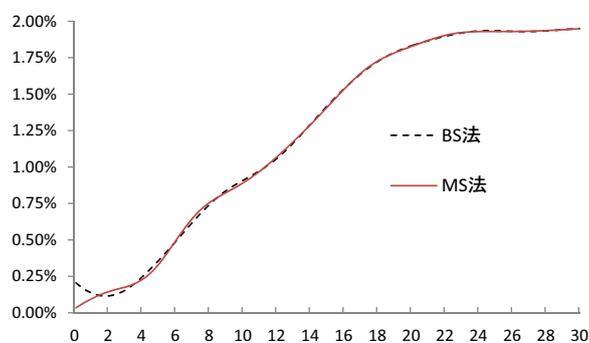


図 13: 2013 年 6 月 25 日のゼロクーポンカーブ

BS法によるゼロクーポンカーブは、短期の年限の形状が「スプーン」の形となっており、このことにより凹凸度が大きくなった。一方、MS法によるゼロクーポンカーブは、図12と同様に、短期の年限で年限の短期化とともに垂れ下がる形状を示している。これは、MS法による推定でしばしば見られる特徴である。

前小節では、BS法による推定について、30年付近の年限で凹凸が大きくなる場合があることを、2017年9月5日の推定カーブ（図8）を例に指摘した。以下では、本小節で設定した節点の配置においても、BS法による推定結果に、図8と同様の傾向が見られるかどうかを確認する。前小節と本小節で設定した節点配置の下、2017年9月5日のBS法によるゼロクーポンカーブの推定値を示したのが図14である。

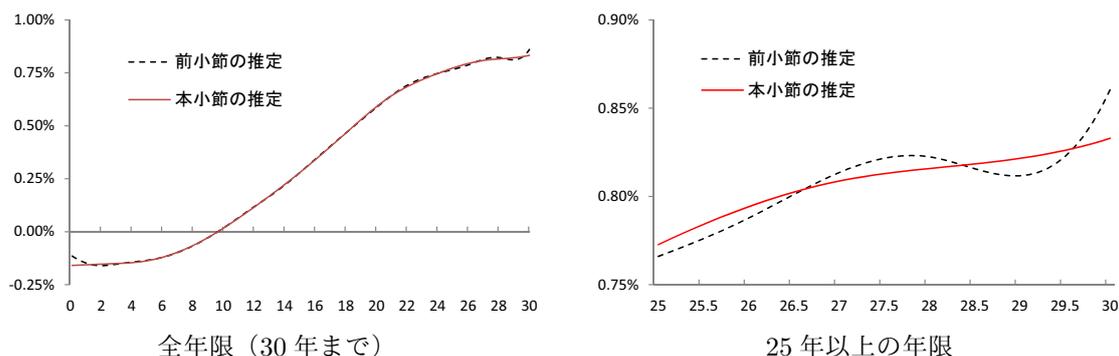


図 14: 2017年9月5日のBS法によるゼロクーポンカーブ

図を見ると、本小節の設定における推定では、30年付近の年限の凹凸が解消されている。他の営業日についても、本小節の節点の設定では、30年付近の年限の凹凸が解消されていることが確認された。

次に、前小節でも確認したように、2007年1月4日～2014年8月29日までの1879営業日、0.1年～30年金利までの0.1年刻み、300の年限のゼロクーポン金利（563700個の金利）に対して、MS法、BS法による推定値が負値を取った金利の数を集計した。その結果を表5に示した。

表 5: ゼロクーポン金利の推定値が負値を取った総数

BS法	MS法
73	110

表からは、金融市場でマイナス金利が観察されるようになった時期以前においても、BS法とMS法の推定値が負値を取ったことを示している。これは、前小節には見られなかった結果である。このように、超低金利環境においては、BS法でもMS法でも短期の年限の節点の間隔を粗くすると、実態に合わずに負の金利を推定してしまうことが確認された。

本小節で得られた結果は、次の通りである。本小節での節点の配置においては、①QQE導入以降、価格適合度はMS法とBS法の間で大きな差は生じておらず、また、RMSPEは概ね0.15%以内に収まっていること、②価格適合度はマイナス金利期間に若干悪化していること、③QQE導入以降の推定カーブの凹凸度はBS法がMS法よりも抑制されていること、④MS法では短期の年限でゼロクーポンカーブの凹凸度が大きくなる場合があること、⑤前小節でみられたBS法による30年付近での凹凸は本小節の節点の設定により解消されること、⑥マイナス金利が市場で観察される以前にも、両手法の短期の年限での推定値は度々負値を取ったことが分かった。

4.3 平滑化スプライン法による推定

本節では、平滑化スプライン法に基づき、日本国債のゼロクーポン金利、および瞬間フォワードレートの推定を行う。推定に用いるモデルは、3.1 節で説明した Fischer et al.[4] による瞬間フォワードレートを B スプライン基底関数の線形結合で表現するモデルである。基底関数に用いる B スプライン関数の次数は 3 とし、節点は $u_k = k - 4$ ($k = 1, 2, 3, 4$), $u_k = 3(k - 4)$ ($k = 5, \dots, 9$), $u_k = 5(k - 6)$ ($k = 10, 11, 12$), $u_k = k + 18$ ($k = 13, 14, 15$) とする。平滑化パラメータは、GCV, GIC, EBBS の 3 つの選択規準でそれぞれ選択する。平滑化パラメータ λ の常用対数値 $\log_{10} \lambda_k = -4 + 0.01(k - 1)$ ($k = 1, \dots, 1001$) に対し、それぞれの選択規準に照らして最適な平滑化パラメータの探索を行う。

図 15 は、平滑化スプライン法によって推定されたゼロクーポン金利と瞬間フォワードレートの推定値に対して、QQE 以前の期間における同一年限の金利平均値を、年限を横軸にプロットしたものである。

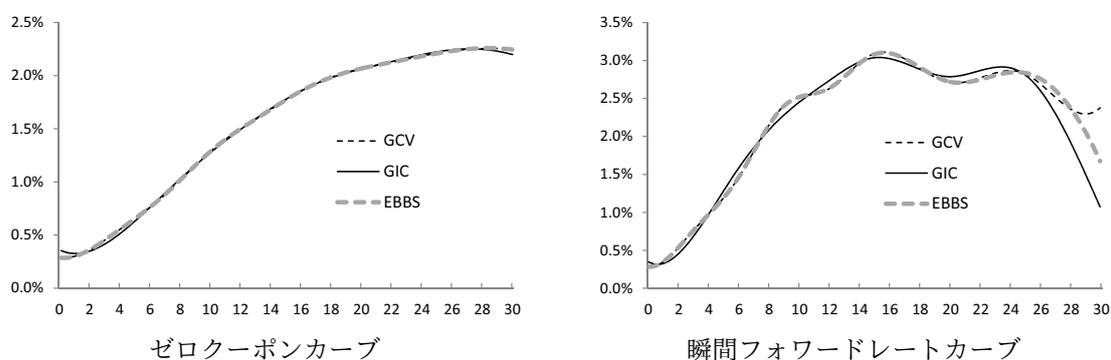


図 15: QQE 以前の金利カーブの平均値

推定されたゼロクーポンカーブに大きな差は生じていない。その一方、瞬間フォワードレートカーブは、選択規準の違いによって形状に違いが生じている。GIC による瞬間フォワードレートカーブは、他の選択規準に基づくカーブと比べて滑らかな形状を取っている。

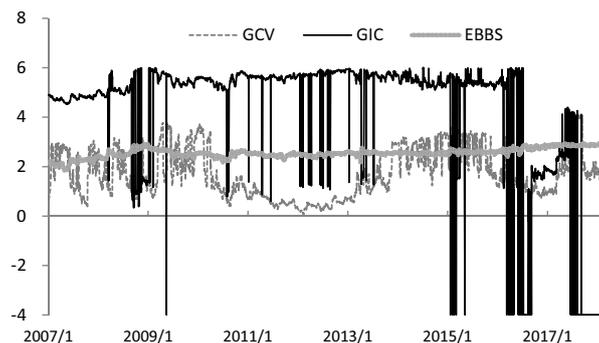


図 16: 選択された平滑化パラメータ (常用対数で表示)

このことは、選択された平滑化パラメータの時間推移を示した図 16 により確認できる。すなわち、QQE 以前、GIC に基づく平滑化パラメータは平均的に見て高水準のものが選択されており、これが図 15 に見られる滑らかな瞬間フォワードレートカーブをもたらしている。但し、図 16 を見ると、GIC に基づく平滑化パラメータは、しばしば低水準のものが選択されている。こ

の点については後述する。なお、GCVとEBBSに基づく瞬間フォワードカーブを比較すると、年限30年付近で形状に違いが生じていることが見て取れる。

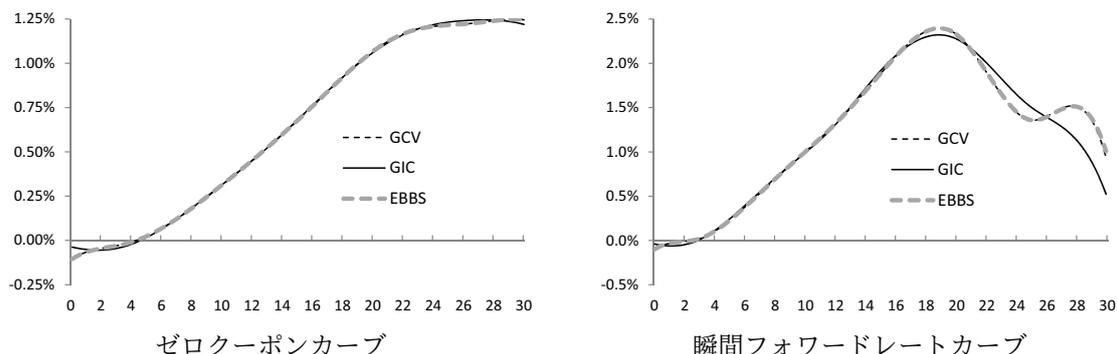


図 17: QQE 以降の金利カーブの平均値

QQE 以降の期間で、図 15 と同様のグラフを作成した (図 17)。

ゼロクーポンカーブは、図 15 の結果と同じように、選択規準間で大きな差は生じていない。一方、瞬間フォワードレートカーブは、短期の年限から年限 18 年あたりにかけては 3 つの選択規準の間で差はみられないが、18 年超の年限で、GIC によるカーブの形状と他の 2 つの選択規準に基づくカーブの形状とで違いが生じている。図 16 で、選択された平滑化パラメータを見てみると、QQE 以降も、QQE 以前と同様に、GIC に基づく平滑化パラメータは平均的に見れば高水準のものが選択されている。それが、図 17 右図にみられるような、GIC の滑らかな推定カーブをもたらしているといえる。但し、図 16 から分かるように、GIC に基づく平滑化パラメータは、マイナス金利期間中、低水準の値が選択されることが多くなっている。この点に関する影響については後述する。

次に、各営業日でのゼロクーポンカーブの推定値に対して、3 つの選択規準間で凹凸度の比較を行う。表 6 は QQE 導入以前の期間に対する結果、表 7 は QQE 導入以降の期間とマイナス金利期間に対する結果である。

表 6、表 7 の結果から、3 つの選択規準間で大きな差は生じていないことが分かる。

表 6: ゼロクーポンカーブの凹凸度 (QQE 以前)

	GCV	GIC	EBBS
平均	2.52×10^{-6}	2.10×10^{-6}	2.41×10^{-6}
標準偏差	1.27×10^{-6}	6.78×10^{-7}	1.26×10^{-6}
最大値	8.12×10^{-6}	8.10×10^{-6}	7.66×10^{-6}

表 7: ゼロクーポンカーブの凹凸度 (QQE 以降, マイナス金利期間)

	QQE 以降			マイナス金利期間		
	GCV	GIC	EBBS	GCV	GIC	EBBS
平均	1.65×10^{-6}	1.28×10^{-6}	1.60×10^{-6}	1.29×10^{-6}	1.15×10^{-6}	1.17×10^{-6}
標準偏差	9.04×10^{-7}	5.87×10^{-7}	8.88×10^{-7}	7.14×10^{-7}	6.47×10^{-7}	6.32×10^{-7}
最大値	4.97×10^{-6}	4.90×10^{-6}	4.77×10^{-6}	3.40×10^{-6}	3.41×10^{-6}	3.20×10^{-6}

次に、ゼロクーポンカーブの凹凸度の時間変化を式 (30) に則って評価する。表 8、表 9 に結果

をまとめた。

表 8: ゼロクーポンカーブの凹凸度の時間変化 (QQE 以前)

	GCV	GIC	EBBS
平均	3.29×10^{-7}	2.53×10^{-7}	2.81×10^{-7}
標準偏差	2.97×10^{-7}	6.57×10^{-7}	2.37×10^{-7}
最大値	3.20×10^{-6}	6.23×10^{-6}	2.50×10^{-6}

表 9: ゼロクーポンカーブの凹凸度の時間変化 (QQE 以降, マイナス金利期間)

	QQE 以降			マイナス金利期間		
	GCV	GIC	EBBS	GCV	GIC	EBBS
平均	2.34×10^{-7}	2.12×10^{-7}	1.80×10^{-7}	2.41×10^{-7}	2.72×10^{-7}	1.72×10^{-7}
標準偏差	1.68×10^{-7}	4.70×10^{-7}	1.49×10^{-7}	1.58×10^{-7}	4.54×10^{-7}	1.29×10^{-7}
最大値	2.57×10^{-6}	6.23×10^{-6}	2.13×10^{-6}	9.37×10^{-7}	3.30×10^{-6}	8.99×10^{-7}

表 8 からは, QQE 以前は, GIC に基づくゼロクーポンカーブの凹凸度の時間変動が, 平均的に見て抑制されていることが分かる. しかし, GIC による凹凸度の変動の期間最大値は, 他の 2 つの選択規準による結果と比べて大きな値を示している. これは, 図 16 が示すように, GIC は平均的に見れば高水準の平滑化パラメータを選択してはいるものの, しばしば低水準のパラメータを選択している点に起因する. すなわち, GIC では, 高水準の平滑化パラメータが選択された翌営業日に低水準の平滑化パラメータが選択されるといったことがしばしば発生しており, ゼロクーポンカーブの形状が 1 日で大きく変わり, 凹凸度の大幅な変動が生じたと考えられる.

表 9 からは, QQE 以降とマイナス金利期間の双方で, EBBS に基づくゼロクーポンカーブの凹凸度の時間変動が抑制されていることが分かる. 図 16 を見ると, EBBS により選択される平滑化パラメータの水準は時間方向に安定しており, このことが, ゼロクーポンカーブの凹凸度の変動を抑制的にしたと考えられる. 一方, GIC は, QQE 導入以降でも, 特に 2016 年半ば以降は, 低水準の平滑化パラメータが選択されることが多かった (図 16). このことにより, GIC は, 特にマイナス金利期間において, 凹凸度の変動が過度になる結果となった⁵.

次に, 瞬間フォワードレートカーブの凹凸度を評価する. 表 10 と表 11 に, QQE 以前と QQE 導入以降の結果をそれぞれまとめた.

表 10: 瞬間フォワードレートカーブの凹凸度 (QQE 以前)

	GCV	GIC	EBBS
平均	1.77×10^{-5}	8.69×10^{-6}	1.21×10^{-5}
標準偏差	6.05×10^{-6}	4.04×10^{-6}	4.11×10^{-6}
最大値	4.33×10^{-5}	4.09×10^{-5}	3.18×10^{-5}

⁵本稿で得られた結果をもって, 「GIC を平滑化パラメータの選択規準とする平滑化法に基づくどのような推定値も時間方向に不安定になる」と一般化することは危険である. 例えば, 阿部他 [14] は, 2007 年 1 月 4 日から 2012 年 6 月 22 日という約 5 年半のデータを用いて, GIC に基づく平滑化法により日本国債のゼロクーポン金利の推定を行っているが, 推定値が時間方向に不安定であったとの報告はない. 阿部他 [14] の研究は, ゼロクーポン金利をガウス型動径関数の線形和で表すモデル化を行っており, 本稿のような瞬間フォワードレートを 3 次 B スプライン関数の線形和で表すモデル化とは異なるものである点に留意する必要がある. 推測の域を出ないが, 「3 次 B スプライン関数を基底関数として瞬間フォワードレートをモデル化する」本稿のモデル化が, 時間方向に安定しない結果をもたらしている可能性も考えられる. この点の解明は, 今後の研究課題としたい.

表 11: 瞬間フォワードレートカーブの凹凸度 (QQE 以降、マイナス金利期間)

	QQE 以降			マイナス金利期間		
	GCV	GIC	EBBS	GCV	GIC	EBBS
平均	1.29×10^{-5}	7.83×10^{-6}	1.09×10^{-5}	1.23×10^{-5}	1.03×10^{-5}	8.22×10^{-6}
標準偏差	5.17×10^{-6}	5.24×10^{-6}	3.98×10^{-6}	7.04×10^{-6}	6.87×10^{-6}	4.26×10^{-6}
最大値	2.69×10^{-5}	2.47×10^{-5}	1.87×10^{-5}	2.69×10^{-5}	2.47×10^{-5}	1.69×10^{-5}

表 10 を見ると, QQE 以前は, GIC に基づく瞬間フォワードレートカーブの凹凸度が他の 2 つの選択規準と比べて平均的には抑制されていることが分かる. しかし, GIC による瞬間フォワードレートカーブの凹凸度の期間最大値は, EBBS によるカーブの凹凸度の期間最大値より高い値を示している. これは, 既に指摘しているように, GIC に基づき選択される平滑化パラメータが, 平均的に見れば高水準であったが, 時に低水準となったことに起因している (図 16 参照).

表 11 を見ると, QQE 導入以降, GIC に基づく瞬間フォワードレートカーブの凹凸度は, 平均的には GCV や EBBS よりも抑制されている. 但し, 同期間中, GIC の期間最大値は, EBBS の期間最大値よりも大きな値を示している. マイナス金利期間について見ると, EBBS による選択規準に基づく瞬間フォワードレートの凹凸度が, 他の選択規準と比べて抑制的な結果となった.

次に, 瞬間フォワードレートカーブの凹凸度の時間変化を式 (31) に則って評価する. 表 12, 13 に結果をまとめた.

表 12: 瞬間フォワードレートカーブの凹凸の時間変化 (QQE 以前)

	GCV	GIC	EBBS
平均	1.78×10^{-6}	1.55×10^{-6}	1.23×10^{-6}
標準偏差	1.44×10^{-6}	4.51×10^{-6}	8.44×10^{-7}
最大値	1.53×10^{-5}	3.59×10^{-5}	1.00×10^{-5}

表 13: 瞬間フォワードレートカーブの凹凸度の時間変化 (QQE 以降、マイナス金利期間)

	QQE 以降			マイナス金利期間		
	GCV	GIC	EBBS	GCV	GIC	EBBS
平均	1.34×10^{-6}	1.40×10^{-6}	9.38×10^{-7}	1.39×10^{-6}	1.93×10^{-6}	9.18×10^{-7}
標準偏差	1.06×10^{-6}	2.60×10^{-6}	5.78×10^{-7}	1.13×10^{-6}	2.96×10^{-6}	5.33×10^{-7}
最大値	9.33×10^{-6}	1.88×10^{-5}	8.42×10^{-6}	9.33×10^{-6}	1.88×10^{-5}	3.99×10^{-6}

表 12 と表 13 の双方において, QQE 以前, QQE 以降, マイナス金利期間の全ての期間において, EBBS による瞬間フォワードレートカーブの凹凸度の時間変化が, 他の選択規準に基づく結果と比べて, 平均的にも期間最大値の観点からも抑制されていることが分かった. すなわち, EBBS を平滑化パラメータの選択規準とする平滑化スプライン法による推定は, 他の選択規準に基づく推定と比べて, ゼロクーポンカーブと瞬間フォワードレートカーブの各営業日における凹凸度が抑制的であり, さらに, 凹凸度の時間変化も安定していることが分かった.

次に, 前節での分析と同様, 2007 年 1 月 4 日~2014 年 8 月 29 日までの 1879 営業日, 0.1 年~30 年金利, 年限 0.1 年刻みで計 300 の年限のゼロクーポン金利が負値を取った数を集計した (表 14).

表 14: ゼロクーポン金利の推定値が負値を取った総数

GCV	GIC	EBBS
1146	364	1167

前節の表 5 と比べると、平滑化スプライン法に基づくゼロクーポン金利の推定では、ゼロを下回って推定される数が大幅に増えている。特に、GCV と EBBS の推定値がゼロを下回る総数が多い結果となっている。推定された負値のゼロクーポン金利の水準をみると、2007 年 1 月 4 日～2014 年 8 月 29 日の期間における最小値は、GCV で -11.99bp 、GIC で -11.99bp 、EBBS で -10.78bp であった。以上の結果は、超低金利環境の下では、平滑化スプライン回帰法は、ゼロクーポン金利の推定値が負値を取る可能性がスプライン回帰法と比べて大きいことを示している。

ゼロクーポン金利の推定値を金融実務や経済分析などで利用する際、一部の年限の推定値のみを用いることがある。例えば、0.5 年以上の年限のゼロクーポン金利推定値のみを用いる場合、0.5 年未満の年限に対応する推定値は必要ない。そこで、2007 年 1 月 4 日～2014 年 8 月 29 日の期間における、0.5 年以上の年限のゼロクーポン金利の推定値がゼロを下回る総数を集計してみると、下記表 15 で示す結果となった。

表 15: ゼロクーポン金利の推定値（0.5 年以上の年限）が負値を取った総数

GCV	GIC	EBBS
40	295	33

ゼロクーポン金利の年限を 0.5 年以上に限定することで負値を取る総数が大幅に減った。上と同様に、2007 年 1 月 4 日～2014 年 8 月 29 日の期間における、それぞれの選択規準に対する推定値の最小値をみると、GCV では -2.56bp 、GIC では -3.61bp 、EBBS では -2.19bp であった。

平滑化スプライン法は過剰適合を避ける推定法として評価されているが、金融市場でマイナス金利が観察されていないが、短期金利がほぼゼロの水準を取るような低金利環境の下では、ゼロクーポン金利の推定値が負値を取りやすくなるという新たな問題が浮上することが明らかになった。推定値を利用する際にこの点が障害になる場合には、平滑化スプライン法ではなく、スプライン回帰法でゼロクーポン金利を推定することによって問題を回避することが考えられる。もしくは、一部年限の推定値しか利用しない場合には、上述の通り、推定値が負値を取る総数や負値の程度が改善されるため、利用上さほど問題とならない可能性もある。

本節で得られた結果の多くは、図 16 に凝縮されている。当該図からは、①GIC は平均的に見れば、高水準の平滑化パラメータを選択するが、しばしば、低水準の平滑化パラメータを選択すること、② マイナス金利期間では、GIC は低水準の平滑化パラメータを選択することが多いこと、③EBBS は、期間を通じて、相応に高水準の平滑化パラメータを時間方向に安定して選択することが分かった。この結果、EBBS に基づくゼロクーポンカーブや瞬間フォワードレートカーブの凹凸度と凹凸度の時間変動は、期間を通じて抑制的となった。また、平滑化スプライン法は、金融市場でマイナス金利が観察されていないものの、短期金利がほぼゼロの水準を取るような低金利環境の下では、負値の推定値を取ることも分かった。

5 まとめと今後の課題

本研究では、2007年1月～2018年3月における日本国債の価格データを用いて、スプライン回帰法と平滑化スプライン法に基づき、ゼロクーポン金利の推定を行った。

スプライン回帰法による推定においては、McCulloch[9]により提案された方法（MS法）とSteeley[12]で扱われたBスプライン関数を基底関数とする方法（BS法）の比較を行った。両手法とも、市場価格へ高い適合度を示した。但し、マイナスイールドカーブが常態化するようになったマイナス金利期間は、両手法とも、平方平均二乗誤差率がそれ以前に比べて幾分悪化した。その要因が、年限15年超の国債銘柄の価格誤差率が拡大していることにあることも分かった。その背景として、QQE導入以降の日本銀行による国債の大規模購入が、超長期ゾーンの国債銘柄の価格形成に何らかの歪みを生じさせている可能性が考えられる。

推定されたゼロクーポンカーブの凹凸度については、MS法、BS法の結果に乖離が生じる営業日が散見された。両手法とも短期の年限で「スプーン」の形状を取る場合に凹凸度が大きくなった。また、MS法では、短期の年限における推定カーブが、年限の短期化とともに下方に垂れる形状が生じ得ることが分かった。一方、BS法では、節点の間隔が密な場合に、年限30年付近のカーブの凹凸が過度になることが明らかになった。但し、BS法の節点の間隔を広めにとると、年限30年付近の凹凸が抑制的となることも併せて分かった。

超低金利局面におけるゼロクーポン金利の推定においては、金融市場でマイナス金利が観察されてはいないものの、短期金利がほぼゼロの水準を取るような市場環境での推定に問題が生じ得ることが、今回の分析で明らかになった。すなわち、このような市場環境では、スプライン回帰法の節点の間隔が粗い場合には、負値のゼロクーポン金利をしばしば推定することになった。しかし、節点の配置を密にすれば、この問題を回避できることも分かった。

平滑化スプライン法による推定において、GICは平均的に見れば、高水準の平滑化パラメータを選択するが、しばしば、低水準の平滑化パラメータを選択した。さらに、マイナス金利期間では、GICは低水準の平滑化パラメータを選択することが多かった。GICに対し、EBBSは、期間を通じて相応に高水準の平滑化パラメータを時間方向に安定して選択した。これによりGICに基づくゼロクーポンカーブや瞬間フォワードレートカーブの凹凸度は、QQE以前とQQE以降で、平均的に見れば抑制されていたが、凹凸度の時間変動は不安定な結果となった。また、マイナス金利期間中は、GICによるゼロクーポンカーブと瞬間フォワードカーブの各営業日での凹凸度や凹凸度の時間変動は、抑制が利かない結果となった。一方、EBBSに基づくゼロクーポンカーブや瞬間フォワードレートカーブの凹凸度と凹凸度の時間変動は、期間を通じて抑制的だった。

平滑化スプライン法はスプライン回帰法の過剰適合を避ける有力な推定法であるが、短期金利が負値を取らず殆どゼロの水準を取るような低金利環境の下では、ゼロクーポン金利の推定値が負値を取りやすくなるという新たな問題に直面することが分かった。この事実は、超低金利環境でのゼロクーポン金利推定の難しさを物語るものであり、推定値の利用上障害となる場合には、多少の過剰適合を引き受けてでもスプライン回帰法によるゼロクーポン金利の推定値を使うのが一案として考えられる。但し、金融実務や経済分析で一部の年限の推定値しか利用しない場合には、平滑化スプライン法により得られた推定値が負値を取る影響が緩和され問題とならない場合もあるという本稿で得られた結果は、念頭に置くと良いだろう。

本研究では、2007年11月に発行が開始された40年国債をゼロクーポン金利の推定に使用していない。40年国債の市場価格もデータに含め、年限が30年超のゼロクーポンカーブや瞬間フォワードレートカーブの推定を行い、超低金利局面における推定結果を分析するのは、今後の課題としたい。また、本研究では、GICによる平滑化パラメータ選択が時間方向に不安定となる

理由を解明できていない。理由の解明と、GICに基づく平滑化スプライン法による現状のゼロクーポン金利推定法の改善も、取り組むべき課題と考えている。

参考文献

- [1] Akaike, H. (1974) “A New Look at the Statistical Model Identification,” *IEEE Trans. Automat Control*, Vol. AC19, pp. 716-723.
- [2] Craven, P. and G. Wahba (1979) “Smoothing Noisy Data with Spline Functions,” *Numerische Mathematik*, Vol. 31, No. 4, pp. 377-403.
- [3] De Boor, C. (1978) *A Practical Guide to Splines*: Springer-Verlag.
- [4] Fischer, M., D. Nychka, and D. Zervos (1995) “Fitting the Term Structure of Interest Rates with Smoothing Splines,” Federal Reserve Board Working Paper.
- [5] Gürkaynak, R.S., B. Sack, and J.H. Wright (2006) “The U.S. Treasury Yield Curve: 1961 to the Present,” Finance and Economics Discussion Series, Washington: Board of Governors of the Federal Reserve System.
- [6] Jarrow, R., D. Ruppert, and Y. Yu (2004) “Estimating the Interest Rate Term Structure of Corporate Debt with a Semiparametric Penalized Spline Model,” *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 99, pp. 57-66.
- [7] Konishi, S and G. Kitagawa (1996) “Generalised Information Criteria in Model Selection,” *Biometrika*, Vol. 833, No. 4, pp. 875-890.
- [8] McCulloch, J.H. (1971) “Measuring the Term Structure of Interest Rate,” *The Journal of Business*, Vol. 44, No. 1, pp. 19-31.
- [9] ——— (1975) “The Tax-Adjusted Yield Curve,” *The Journal of Finance*, Vol. 30, No. 3, pp. 811-830.
- [10] Nelson, C. R. and A.F. Siegel. (1987) “Parsimonious Modeling of Yield Curves,” *Journal of Business*, Vol. 60, No. 4, pp. 473-489.
- [11] Ruppert, D. (1997) “Empirical-Bias Bandwidths for Local Polynomial Non-parametric Regression and Density Estimation,” *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 92, pp. 1049-1062.
- [12] Steeley, J.M. (1991) “Estimating the Gilt-Edged Term Structure: Basis Splines and Confidence Intervals,” *Journal of Business Finance and Accounting*, Vol. 18, No. 4, pp. 513-529.
- [13] Svensson, L.E. (1995) “Estimating Forward Interest Rates with the Extended Nelson and Siegel Method,” *Sveriges Riksbank Quarterly Review*, Vol. 3, No. 1, pp. 13-26.
- [14] 阿部卓哉・佐々木正信・松岡英俊・池田弘 (2013) 「ノンパラメトリック手法と業者間市場データを用いたイールドカーブの推定」, 『FRI コンサルティング最前線』, 第5巻, 62-71頁.

- [15] 川崎能典・安道知寛 (2002) 「正則化非線形回帰モデルによるイールドカーブの推定」, 『統計数理』, 第 50 巻, 第 2 号, 149-164 頁.
- [16] 菊池健太郎・新谷幸平 (2012) 「本邦国債価格データを用いたゼロ・クーポン・イールドカーブ推定手法の比較分析」, 『金融研究』, 第 31 巻, 第 3 号, 35-85 頁.
- [17] 小峰みどり・山岸正明・松本和幸・二木高志・司淳・長尾知幸・砂川和彦・佐野尚史 (1989) 「わが国債券市場固有の現象と期間構造分析」, 『ファイナンシャル・レビュー』, 第 14 巻.
- [18] 日本銀行金融市場局 (2015) 「2014 年度の金融市場調節」. BOJ Reports & Research Papers.
- [19] 三宅裕樹・服部孝洋 (2016) 「イールド・カーブ推定の動向—日本における国債・準ソブリン債を中心に—」, 『ファイナンス:財務省広報誌』, 第 52 巻, 第 8 号, 65-71 頁.