

2018年9月28日号

リスクフラッシュ 272号(第9巻 第7号)



# Risk Flash No.272 (Vol.9 No.7)

発行：滋賀大学経済学部附属リスク研究センター  
発行責任者：リスク研究センター長 近藤豊将

- 研究・論文紹介：近藤豊将・・・Page1-4
- 第5回リスク研究センター主催ネットワーク経済学セミナー：田中勝也・・・Page5
- ディスカッションペーパー発行(J-65)のご案内：楠田浩二・・・Page6-7
- リスク研究センター事務室よりお知らせ・・・Page8

## 研究・論文紹介

ファイナンス学科教授 近藤豊将

筆者はマクロ財政学や数理経済学を専門とする経済学者なのだが、最近の文理融合の潮流の中で、もともと興味があった数学の研究にも乗り出している。実際にやってみると、この分野も経済学にも勝るとも劣らずエキサイティングな世界である。ここでは、筆者らの最近の論文[1],[2],[3]に関して、**不動点定理**について数学の予備知識を前提とせず解説し、その限界での研究の雰囲気的一端をお伝えしたい。

**写像**（または関数）というのは、平たく言えば、「何か」に対して「何か」を対応させる規則のことである。例えば、 $f(x)=x^2$ という関数は、1に対しては $1^2$ を、2に対しては $2^2$ を対応させる規則を表している。物事が（ $x$ から $x^2$ へというように）変化していく決まりを定めているとみなすこともできる。

そのような変化の法則の中で、“動かない点”が存在する場合もある。上の例でいえば、0と1である。実際、 $f(0)=0^2=0$ だし、 $f(1)=1^2=1$ なので、この2点は写像 $f$ で移しても動かない。このような点を $f$ の**不動点**という。写像 $f$ の不動点 $x$ は、式を用いて $f(x)=x$ と表現できる。

このうつろいやすい世の中で“動かないもの”というのは、時代を超えて本質的で重要なもののような気がしないだろうか。そのような哲学的な問いはさておき、不動点は数学的に古くから研究されてきたし、教科書レベルで紹介されることもある重要な概念である。

ただし、文系の学徒でもふれる機会の多い微分積分学や線型代数学の教科書ではあまりお目にかからない。理工系の多くの学生が、1年時の微分積分学、線型代数学に続いて2年生で習う科目に、「集合と位相」という科目があるのだが、そこで「**縮小写像の不動点定理**」というものが紹介されることが多い。これが多くの人にとって、不動点定理との最初の出会いとなる。

**縮小写像**というのは、2点間の距離を縮小する（ちぢめる）写像のことである。簡単な場合で説明しよう。写像  $f$  を実数の集合上の写像とする。つまり、実数  $x$  に対して、実数  $f(x)$  が対応する決まりが与えられているとする。この写像  $f$  が縮小写像であるとは、ある  $0$  以上  $1$  未満の定数  $r$  が存在し、どんな実数  $x, y$  をとったとしても、

$$|f(x) - f(y)| \leq r|x - y|$$

が成り立つことである。両辺に現れているタテ棒  $| \ |$  はあのなつかしい絶対値記号であり、 $|x - y|$  は二つの実数  $x$  と  $y$  がどれぐらい離れているか、つまり  $x$  と  $y$  の**距離**を表している。したがって、上の式は、 $x$  と  $y$  の間の距離  $|x - y|$  に比べて、写像で移された先の2点  $f(x), f(y)$  の間の距離  $|f(x) - f(y)|$  がちぢんでいることを表している。定数  $r$  は、“ちぢみ率の上限”を表しているというわけである。具体的には、写像  $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$  は、ちぢみ率  $1/2$  の縮小写像である。

縮小写像の不動点定理が主張するのは、以下のような内容である。

**定理.**  $X$  を完備距離空間、 $f$  を  $X$  から  $X$  への縮小写像とする。このとき、 $X$  内に  $f$  の不動点がただ一つ存在する。

ここで、**距離空間**というのは、2点間の距離が定まった集合のことである。実数の集合に差の絶対値をセットにした世界が代表選手だと思ってもよいが、実は距離空間というのは、様々な無限次元空間をも特殊ケースとして包含する、きわめて一般的で <sup>ほうじょう</sup>豊饒な世界である。**完備**というのは実数の集合のように“スキがない”ことを表現している。（これが有理数の集合だと、円周率  $\pi$  などは含まれず、スキだらけなのである。）

この定理には、二つの主張が含まれている。(1) 不動点が存在するということと、(2) (存在するならば) それは一つだけだということである。ここでは、 $X$ =実数の集合の場合で(2)を証明してみる。“不動点が(それは存在するとして)一つだけである”ことの証明である。どうすれば証明できたことになるだろうか？(5分間考えてみましょう。) 次のようにすればよい。

2点  $x$  と  $y$  を両方、写像  $f$  の不動点だと仮定すると、必然的に  $x=y$  とならざるを得ないことを示すのである。二つあるかと思いきや、どうあがいてもそれらは別のものでありえない、したがって、不動点は（存在するならば）一つだけだ！というわけである。やってみよう：

**不動点の一意性の証明.** 2点  $x$  と  $y$  を両方、写像  $f$  の不動点とする。（目標は、 $x=y$  を示すことである。お忘れなく。）写像  $f$  は、縮小写像なので、

$$|f(x) - f(y)| \leq r|x - y|$$

が満たされる。ここで、 $r$  は 0 以上 1 未満の実数である。2点  $x$  と  $y$  は写像  $f$  の不動点なので、 $x=f(x)$  と  $y=f(y)$  が成り立つ。これらを上の式に代入すると、

$$|x - y| \leq r|x - y|$$

が得られる。移項して整理すると、

$$(1 - r)|x - y| \leq 0$$

となる。定数  $r$  は(0 以上)1 未満なので、 $1 - r$  は 0 より大きい数である。したがって、それで両辺を割っても、(中学校で習ったように) 不等号の向きは変わらない。よって、

$$|x - y| \leq 0$$

を得る。絶対値をとって 0 以下ということは、 $x - y = 0$  ということである。したがって、 $x = y$  となる。（証明終わり）

なんという華麗な証明であろうか。現代数学を勉強すると、このような論法を自家葉籠中じかやくろうちゅうのものとして自由自在に駆使し、様々な現象を数理的に解析できるようになるのである！ さあ、あなたも今すぐ現代数学を勉強しよう！ そのために好適な本として、大家の筆による下の[4]を挙げておく。

冒頭で紹介した筆者らの最近の論文では、縮小写像よりもかなり一般的なある種の写像について不動点定理を証明し、さらに不動点を近似する点列の構成方法を示した。後半部分の意味するところは、“このように点列をつくり極限をとれば、その点列の収束先は不動点になる”ということである。そのような不動点近似の方法は何通りか知られており、それらを一般化したり洗練したりする努力が、日夜、続けられているのだ。

研究の進展を目指す人たちの不断の努力により、ときにはシャープに、ときには大胆に手法や概念が革新されていくサマを見るのは、誠に感動的でエキサイティングである。しかし、そのような感動を至近距離で味わおうと思えば、自らも革新に貢献する努力が求められる。大学の社会的評価も、そこに所属する個々の研究者の努力の集積により定まるの

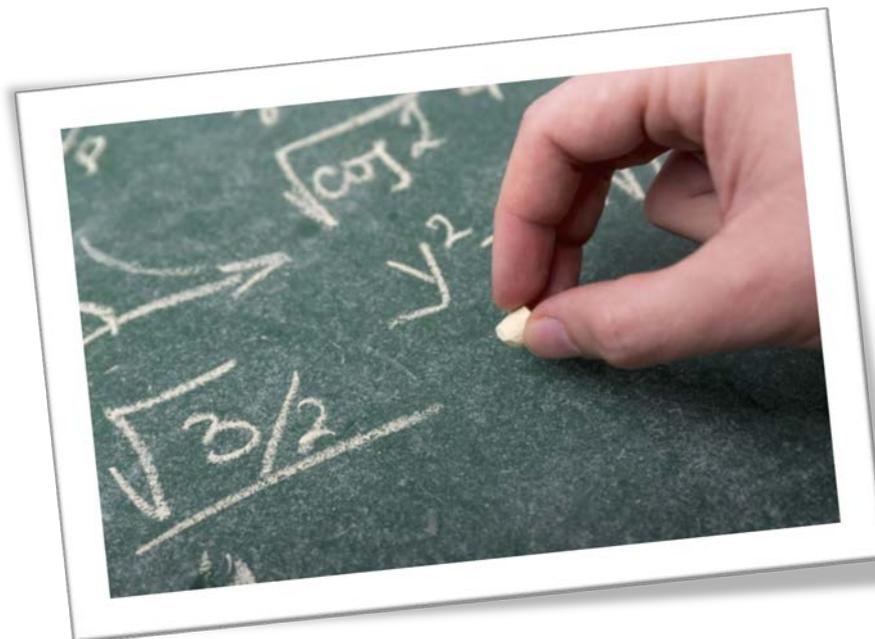
である。近年、日本の大学の国際的な存在感の低下が問題視される中で、個々の研究者がフルパワーを発揮するための環境整備が俟たれている。本学経済学部について言えば、卒業生の皆様のご支援により、多大な恩恵を受けていることに改めてお礼を申し上げます。

[1] A. Kondo and W. Takahashi, Attractive point and weak convergence theorems for normally N-generalized hybrid mappings in Hilbert spaces, *Linear and Nonlinear Analysis* 3 (2017), 297-310.

[2] A. Kondo and W. Takahashi, Strong convergence theorems of Halpern's type for normally 2-generalized hybrid mappings in Hilbert spaces, *Journal of Nonlinear and Convex Analysis* 19 (2018), 617--631.

[3] M. Hojo, A. Kondo and W. Takahashi, Weak and Strong Convergence Theorems for Commutative Normally 2-Generalized Hybrid Mappings in Hilbert Spaces, *Linear and Nonlinear Analysis*, Vol. 4 (2018), No. 1, 117-134.

[4] 高橋渉『非線形・凸解析学入門』横浜図書



## 第 5 回リスク研究センター主催ネットワーク経済学セミナー Arthur Viianto LARI 氏・Coralia Azucena Quintero Rojas 氏 (グアナファト大学経済学部)

本学とも協定校であるメキシコ・グアナファト大学より 2 名の研究者をお迎えして、ネットワーク経済学セミナーを開催しました。

第 1 報告者の Lari Arthur Viianto 氏 (同大学経済学部・准教授) は、"Emotions of altruism, envy and guilt: experimental evidence" と題して、利他主義、嫉妬、罪悪感などの感情が、個人の経済行動に与える影響に関する研究を報告されました。予算制約をビジュアル化した独自形式の経済実験により、上記の感情の度合いが被験者の購買行動に有意に影響を与えていることなどを示されました。

第 2 報告者の Coralia Azucena Quintero Rojas 氏 (同大学経済学部・准教授) は、"Can social norms account for gender discrimination in the labor market? An agent based exercise" という題目で、労働市場における性差別の存在とその度合いが、転職活動に与える影響に関する数値シミュレーションを報告されました。エージェントベースモデルによる分析の結果、性差別が転職の成功確率に負の影響を与えていること、人的ネットワークが補完的役割を果たし、他者とのつながりが密であるほどに成功確率が有意に上昇することなどが示されました。

セミナーには教員 2 名、大学院生 4 名、グアナファト大学からの交換留学生 1 名、学部生 12 名の約 20 名が参加しました。小規模なセミナーではありましたが、報告後の質疑応答では活発な議論が交わされ、参加者のネットワーク経済学や経済実験や数値シミュレーションなどの手法に対する感心の高さがうかがわれました。

文責：滋賀大学環境総合研究センター・教授 田中勝也

## ディスカッションペーパーA-65号発行のご案内

### Epstein-Zin 効用に基づく消費と長期証券投資の 最適化問題に対する近似解析解

CRR Discussion Paper No. J-62

滋賀大学大学院博士後期課程 バトボルド ポロルソフタ  
ファイナンス学科准教授 菊池 健太郎  
ファイナンス学科教授 楠田 浩二

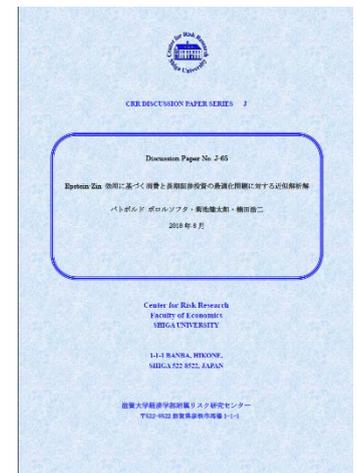
#### 【研究背景】

現代証券投資理論では、分散投資に加えて長期投資が推奨されている。Campbell and Viceira(2002)は、長期投資においては安全証券は短期債ではなく長期物価連動債であることを指摘し、金利変動下の消費と株式・債券投資の最適化問題を研究しているが、同問題では、一般にHJB(Hamilton-Jacobi-Bellman)方程式は非斉次偏微分方程式となり解析解の導出を困難にする。

他方、従来消費と投資の問題で仮定されてきた CRRA(Constant Relative Risk Aversion)効用は、投資家の異なる状態間の変動(危険)に対する回避度と異なる時点間の変動に対する回避度を分離出来ないという欠陥を抱えている。多くの実証分析が、典型的個人は異なる状態間の変動(危険)よりも異なる時点間の変動に対し回避的であると示していることを考慮すると、これらを分離出来る効用に基づき、消費と投資の問題を考察することが望ましい。Epstein-Zin 効用 (Epstein and Zin(1989)) は、これらの変動に対する回避度を分離出来るように CRRA 効用を一般化したものである。

Campbell and Viceira()は、短期債と一定満期の長期物価連動債に投資する消費と投資の最適化問題を Epstein-Zin 効用とバシチェック金利モデルの下で確率制御により解いている。彼等は HJB 方程式から導出される偏微分方程式の非斉次項を対数線形近似し、近似解析解を導出している。その後、楠田(2013)は彼

等の導出した近似解析解が高次の一般解における低次の候補解に過ぎないことを示している。



最近になって、バトボルド・菊池・楠田(2018a)は、証券投資の対象を短期債、全満期の国債、株式指数等の主要指数に拡大したアフィン潜在ファクター証券市場モデルに一般化し、CRRA 効用にに基づく消費と長期証券投資の最適化問題に対し、高次の近似解析解を導出している。また、バトボルド・菊池・楠田(2018b)は、同アフィン潜在ファクター証券市場モデルにナイトの不確実性を導入し、投資家の「相似拡大的頑健効用」(Maenhout(2004))に基づく消費と長期証券投資の最適化問題に対し、高次の近似解析解を導出している。

## 【要約】

アフィン潜在ファクター証券市場モデルの下、Epstein-Zin 効用を有する消費者の消費と長期証券投資の無限期最適化問題を考察する。本稿の主要な結果は次の通りである。

まず、消費と投資の最適化問題に対し、Campbell and Viceira(2002)、楠田(2013)の近似法を用いて、高次の近似解析解を導出した。バトボルド他(2018)が導出した相似拡大的頑健効用の場合の近似最適投資と比較すると、相似拡大的頑健効用の場合は、将来の潜在ファクターの変化を考慮しない「近視眼的需要項」が相対的危険回避度と「相対的曖昧性回避度」の和に反比例するほか、将来の潜在ファクターの変化に保険を掛ける「保険的需要項」には係数に相対的危険回避度と相対的曖昧性回避度が明示的に現れる。他方、Epstein-Zin 効用の相対的危険回避度・相対的異時点間変動回避度と相似拡大的頑健効用の相対的危険回避度・相対的曖昧性回避度の間特定の関係がある場合、これらの投資家の投資行動を外部から観察する者にとっては、投資家が何れの効用を持つのかを識別し難いことが示された。

次に、相対的異時点間変動回避度が1の場合は非斉次項が対数線形近似するまでもなく対数関数で表され、厳密な解析解を導出した。

最後に、同近似解析解では、近似価値関数における未知パラメータ群の従う連立常微分方程式が導出されているが、同方程式では、解が一般に複数存在しており、これらの候補解から最適解を識別する必要がある。そこで、Agram and Oksendal(2014)が示した前進・後退確率微分方程式の最適制御問題の最適解の十分条件を援用して、上記候補解の中から近似最適解を識別する条件を提示した。

上記ディスカッションペーパーは、リスク研究センターホームページのディスカッションペーパーサイト

<https://www.econ.shiga-u.ac.jp/risk/10/2/3/8.html> でもご覧頂けます。

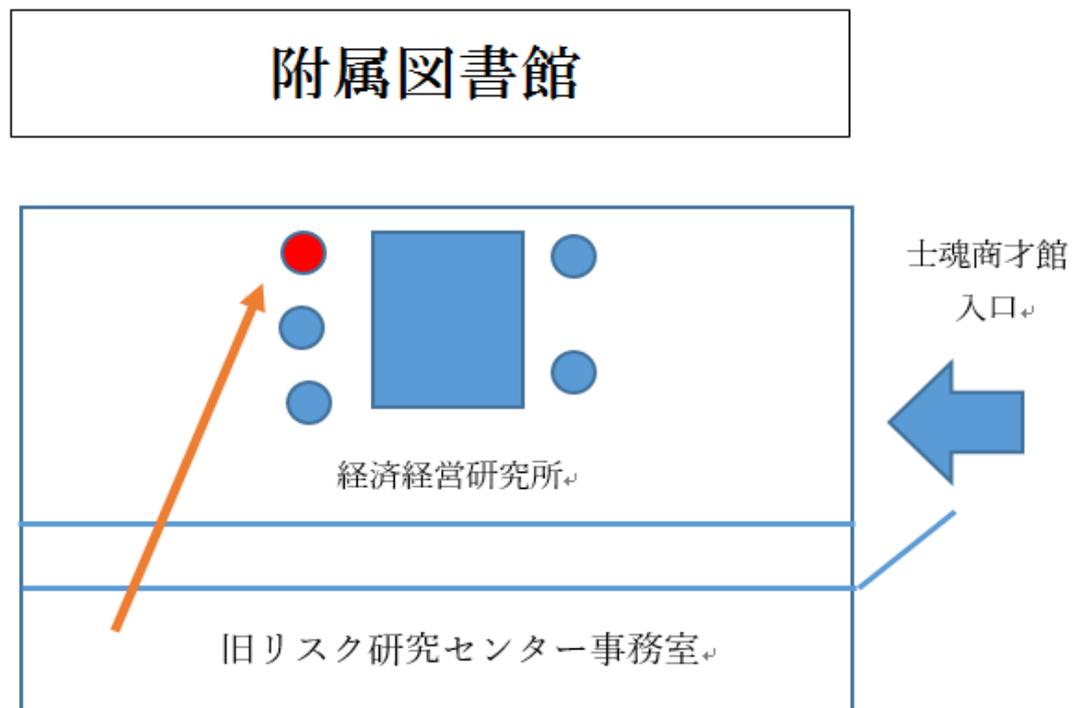
尚、冊子体をご希望の方は、メールにてリスク研究センター事務局までご連絡ください。

## リスク研究センター事務室移転のお知らせ

いつもお世話になっております。リスク研究センター事務室です。  
このたび、平成30年10月末日をもちまして、下記の通り移転いたしますのでご案内申し上げます。

移転先は現事務室向かいの経済経営研究所内となっております。  
住所及び電話、FAX、メールアドレスの変更はございません。  
移転後も変わらぬご支援・ご鞭撻のほどよろしくお願い申し上げます。

### ◇案内図◇



### 「リスクフラッシュご利用上の注意事項」

本規約は、滋賀大学経済学部附属リスク研究センター（以下、リスク研究センター）が配信する週刊情報誌「リスクフラッシュ」を購読希望される方および購読登録を行った方に適用されるものとします。

#### 【サービスの提供】

1. 本サービスのご利用は無料ですが、ご利用に際しての通信料等は登録者のご負担となります。
2. 登録、登録の変更、配信停止はご自身で行ってください。

#### 【サービスの変更・中止・登録削除】

1. 本サービスは、リスク研究センターの都合により登録者への通知なしに内容の変更・中止、運用の変更や中止を行うことがあります。
2. 電子メールを配信した際、メールアドレスに誤りがある、メールボックスの容量が一杯になっている、登録アドレスが認識できない等の状況にあった場合は、リスク研究センターの判断により、登録者への通知なしに登録を削除できるものとします。

#### 【個人情報等】

1. 滋賀大学では、独立行政法人等の保有する個人情報の保護に関する法律（平成15年5月30日法律第59号）に基づき、「国立大学法人滋賀大学個人情報保護規則」を定め、滋賀大学が保有する個人情報の適正な取扱いを行うための措置を講じています。
2. 本サービスのアクセス情報などを統計的に処理して公表することがあります。

#### 【免責事項】

1. 配信メールが回線上的問題（メールの遅延、消失）等によりお手元に届かなかった場合の再送はいたしません。
2. 登録者が当該の週刊情報誌で得た情報に基づいて被ったいかなる損害については、一切の責任を登録者が負うものとします。
3. リスク研究センターは、登録者が本注意事項に違反した場合、あるいはその恐れがあると判断した場合、登録者へ事前に通告・催告することなく、ただちに登録者の本サービスの利用を終了させることができるものとします。

#### 【著作権】

1. 本週刊情報誌の全文を転送される場合は、許可は不要です。一部を転載・配信、或いは修正・改変してblog等への掲載を希望される方は、事前に下記へお問い合わせください。

\*尚、最新の本注意事項はリスク研究センターのホームページに掲載いたしますので、随時ご確認願います。

( <https://www.econ.shiga-u.ac.jp/risk/10/2/3/12.html> )

発行：滋賀大学経済学部 附属リスク研究センター

編集委員：近藤豊将、得田雅章、石井利江子、野田昭宏、菊池健太郎  
松下京平、井澤龍、清水昌平

事務補佐員：山崎真理

滋賀大学経済学部附属リスク研究センター事務局（Office Hours:月一金 10:00-17:00）

〒522-8522 滋賀県彦根市馬場1-1-1 TEL:0749-27-1404 FAX:0749-27-1189

e-mail: [risk@biwako.shiga-u.ac.jp](mailto:risk@biwako.shiga-u.ac.jp)

Web page : <https://www.econ.shiga-u.ac.jp/risk/>