CRR DISCUSSION PAPER SERIES J

Discussion Paper No. J-69

CRRA 効用消費者の長期国際証券投資の有限時間最適化問題に対する解析解

バトボルド ボロルソフタ・菊池健太郎・楠田浩二

2018 年 10 月

Center for Risk Research
Faculty of Economics
SHIGA UNIVERSITY

1-1-1 BANBA, HIKONE,
SHIGA 522-8522, JAPAN

滋賀大学経済学部附属リスク研究センター

〒522-8522 滋賀県彦根市馬場 1-1-1

CRRA 効用消費者の長期国際証券投資の
有限時間最適化問題に対する解析解

バトボルド ボロルソフタ　　菊池 健太郎　楠田 浩二 *
滋賀大学大学院博士後期課程　　滋賀大学　　滋賀大学

和文概要　Liu [7] は，潜在ファクターが自身の 2 次関数であるドリフト項及び拡散項を持つ拡散過程に従い，短期金利，リスクの市場価格の平方等が潜在ファクターの 2 次関数で記述される証券市場モデルを仮定し，CRRA(Constant Realtive Risk Aversion) 効用消費者が短期債と複数の危険証券に投資する問題を考察している．彼は同問題の最適化の結果導出される非斉次偏微分方程式に対し，非斉次項を捨象した斉次偏微分方程式の解析解に基づいて解析解を構成している．本稿では，潜在ファクターが多次元版 Ornstein-Uhlenbeck 過程，短期金利，リスクの市場価格等が潜在ファクターのアフィン関数にそれぞれ従う国際証券市場モデルを仮定し，CRRA 消費者が短期債，全満期の物価連動債，複数の非債券主要指数に投資する問題に対して Liu [7] の解析解構成法により解析解を導出する．同解析解に基づく最適投資比率を国内証券投資の最適投資比率と比較すると，国際証券投資の最適投資比率は，為替レート固有の状態過程の変化の影響を受けているほか，最適投資比率の同変化に対する感応度は世界経済の実物面に関するリスクの市場価格の内外価格差と為替レートに関するリスクの市場価格の内外価格差に影響を受けていることが示される．

キーワード: 解析解，確率制御，国際証券投資，物価連動債投資，消費と投資の問題，長期証券投資

1.　序論

平成バブル崩壊以降の長期低成長の一因としてイノベーション創出のためのリスク・マネーの供給不足が指摘されてきたほか，社会保障制度の持続困難に伴い各家計が退職後に備えるための資産形成を行う必要性が高まってきたことから，国家経済戦略として「貯蓄から投資へ」が提唱されて久しいが，家計の投資比率は低迷を続けている．一因として，政府が家計の資産運用において模範的アセット・アロケーションを提示出来ていないことが挙げられる．また，GPIF が 2014 年秋，運用収益率の向上を企図して公的年金運用における株式投資比率を引き上げる方針を決定したが，同施策は運用収益率のリスク上昇も伴うため，公的年金資金運用における株式等のリスク資産の投資比率は，本来，我が国の平均的家計の最適アセット・アロケーションを踏まえて設定されるべきものである．こうした観点から，家計の模範的アセット・アロケーションの探求は，現在日本経済の喫緊の課題であると思料する．

現代証券投資理論では長期分散投資が推奨されている．長期投資においては，Campbell and Viceira(2002) 等により，安全証券は短期債ではなく物価連動債であることが指摘されている．分散投資においては，CAPM(Capital Asset Pricing Theory) により，究極の分散投資が推奨されており，国内外の時価総額加重型指数への投資が推奨されている．

本稿の目的は，家計の模範的アセット・アロケーションへの接近として，実用に耐える一般性の高い証券市場モデルを仮定した上で，標準的な CRRA(Constant Relative Risk Aversion) 効用を有する消費者の国内外の全満期の物価連動債，非債券主要指数を投資対象とする有限

*連絡先 kusuda@biwako.shiga-u.ac.jp

時間最適化問題に対し解析解を導出することである．

Campbell and Viceira [3] は，金利変動下，CRRA 効用消費者が短期債と一定満期の物価連動債に投資する最適化問題を考察しているが，同問題では．一般に HJB 方程式は非斉次偏微分方程式となり解析解の導出を困難にする．彼等は，同偏微分方程式の非斉次項に Campbell [2] の対数線形近似法を適用し，近似解析解を導出している．

他方，Liu [7] は，潜在ファクターが自身の 2 次関数であるドリフト項及び拡散項を持つ拡散過程に従い，短期金利，リスクの市場価格の平方等が潜在ファクターの 2 次関数で記述される 1 国証券市場モデルを仮定し，CRRA 効用を有する消費者が短期債と複数の危険証券に投資する有限時間最適化問題を考察している．Liu [7] は HJB 方程式から導出された非斉次偏微分方程式に対し，非斉次項を捨象した斉次偏微分方程式の解析解に基づいて解析解を構成している．

我々は，国際証券投資を対象とするため，Mamaysky [9] のアフィン潜在ファクター株式市場モデルと Leippold and Wu [6] の国際証券市場モデルを統合した，一般性の高い「アフィン潜在ファクター国際証券市場モデル」（菊池 [5]）に着目し，同モデルおける非定常項を捨象した「アフィン定常潜在ファクター国際証券市場モデル」を仮定した．同モデルでは，潜在ファクターが多次元版 Ornstein-Uhlenbeck 過程，国内外の短期金利，リスクの市場価格等が潜在ファクターのアフィン関数にそれぞれ従っている．

我々は本問題に Liu [7] の解析解構成法を適用し，解析解を導出した．同厳密解に基づく最適投資比率を近似解に基づく近似最適投資比率と比較すると，将来の潜在ファクターの変化を考慮しない近視眼的需要項は同一であるが，将来の潜在ファクターの変化に保険を掛ける保険需要項は本来潜在ファクターの複雑な関数であるにも拘らず，近似解ではアフィン関数と見做していることが示された．

また，同最適投資比率を国内証券投資の最適投資比率と比較すると，国際証券投資の最適投資比率は，為替レート固有の状態過程の変化の影響を，第 1 項の近視眼的需要では為替レート固有のリスクの市場価格の変化を通じて間接的に，第 2 項の保険需要項では直接的に受けていること，そして，最適投資比率の同変化に対する感応度は世界経済の実物面に関するリスクの市場価格の内外価格差と為替レートに関するリスクの市場価格の内外価格差に影響を受けていることが判明した．これは，最適投資の決定に際して，観測出来ない実物面に関する状態過程に加え，為替レートに関する状態過程，さらに，実物面に関するリスクの市場価格の内外価格差，為替レートに関するリスクの市場価格の内外価格差を高精度で推測することが必要であることを示している．

家計の模範的アセット・アロケーションへの次なる接近として，ナイトの不確実性下，曖昧性回避的な「相似拡大的頑健効用」（Maenhout [8]）を有する消費者の長期国際証券投資の最適化問題を考察している．相似拡大的頑健効用の場合，HJB 方程式には，非斉次項のみならず非線形項も現れるため，Liu [7] の解析解構成法は適用出来ない．従って，近似解析解を導出することとなるが，このとき，近似精度の評価が問題となる．相似拡大的頑健効用の特殊な場合が CRRA 効用なので，同近似解の近似精度は，CRRA 効用関数及び証券市場モデルのパラメータを特定出来れば，本稿で導出した厳密解との比較により分析出来る．

本稿の構成は次の通りである．2 章では，アフィン定常潜在ファクター国際証券市場モデルと消費者の最適化問題を説明する．3 章で，HJB 方程式から導出される値関数の偏微分方程式より解析解を導出し，最適投資比率を示す．4 章で，今後の課題を述べる．

2. アフィン定常潜在ファクター国際証券市場モデルと消費者の最適化問題

本章では，先ず，アフィン定常潜在ファクター国際証券市場モデルを紹介し，証券価格過程の従う確率微分方程式を示す．次に，相似拡大的頑健効用を持つ消費者の消費と投資の最適化問題を示す．

2.1. 市場環境

無限連続時間の摩擦の無い証券市場経済を考察する．ナイトの不確実性下，投資家共通の最も有り得べき確率測度と情報構造は完備フィルター付き確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathrm{P})$ によりモデル化されている．ここで，$\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,\infty)}$ は $\bar{N}$ 次元標準ブラウン運動 B によって生成される自然なフィルター付けである．確率測度 P の下での期待値作用素を E，条件付き期待値作用素を E_t と表記する．

国内市場では，1 種類の消費財と次に説明する諸証券が流通している．諸証券として，安全証券 (以下,「短期安全証券」と呼ぶ),「中長期安全証券」としての信用リスクの無い割引物価連動債（以下,「物価連動債」と呼ぶ）で，満期までの期間が最長 τ，額面 1 円の任意満期の物価連動債，J 種類，種類の非債券の主要指数（株式指数，REIT 指数等）が任意の時点で市場で取引されている．海外市場は，通貨の相異なる N 国の第 n 国（ここで，$n \in \{1, \cdots, N\}$，以下同様）において，満期までの期間が最長 $\hat{\tau}_n$，額面 1 第 n 国通貨単位の任意満期の物価連動債，$\hat{J}_n$ 種類の非債券の主要指数が任意の時点で市場で取引されている．また，各国間で為替取引が任意の時点で行われている．

以下では，消費財を価値基準財とし，諸証券の価格は実質価格で表示される．国内における短期安全証券の実質価格を P 円，満期 T の物価連動債の実質価格を P^T 円，非債券第 j 指数の配当込みの実質価格を S^j 円と表記し，海外の第 n 国における満期 T の物価連動債の実質価格を $\hat{P}_n^T$ 第 n 国通貨単位，非債券第 j 指数の実質価格を $\hat{S}_n^j$ 第 n 国通貨単位と表記する．国内消費財空間は，消費過程 c が $\int_0^\infty c_t dt < \infty\ a.s.$ を満たす非負値可測過程の空間とする．

菊池 [5] は，Mamaysky [9] のアフィン潜在ファクター株式市場モデルと Leippold and Wu [6] の国際証券市場モデルを結合した，一般性の高いアフィン潜在ファクター国際証券市場モデルを提案している．しかし，同モデルでは，株式価格過程をモデル化するための潜在ファクターが非定常であり，本稿における潜在ファクターの定常性に基づく近似解析を適用不可にする．そこで，本稿では，菊池 [5] のアフィン潜在ファクター国際証券市場モデルにおける非定常項を捨象した「アフィン定常潜在ファクター国際証券市場モデル」を仮定する．

仮定 1. $\bar{N}$ 次元潜在ファクターは M 次元ファクター X と N 次元ファクター Y から成り，各ファクターは次の確率過程に従う．

$$dX_t = K_X(\theta_X - X_t)\,dt + \Sigma_X\,dB_t^X, \tag{2.1}$$

$$dY_t = K_Y(\theta_Y - Y_t)\,dt + \Sigma_Y\,dB_t^Y, \tag{2.2}$$

ここで，θ_X は M 次元定数ベクトル，θ_Y は N 次元定数ベクトル，K_X, Σ_X は $M \times M$ 定数行列，K_Y, Σ_Y は $N \times N$ 定数行列である．また，(K_X, K_Y) は次のように対角化可能な正定値対称行列である．

$$L_X = Q_X^{-1} K_X Q_X = \begin{pmatrix} l_1^X & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & l_2^X & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & l_M^X \end{pmatrix}, \qquad L_Y = Q_Y^{-1} K_Y Q_Y = \begin{pmatrix} l_1^Y & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & l_2^Y & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & l_N^Y \end{pmatrix},$$

ここで，$l_1^X, l_2^X, \cdots, l_M^X, l_1^Y, l_2^Y, \cdots, l_N^Y > 0$ であることに留意.

アフィン定常潜在ファクター国際証券市場モデルでは，潜在ファクター X_t が世界経済の実物面の変動要因として，潜在ファクター Y_t が為替レートの変動要因としてモデル化されている.

仮定 2. *1.* 国内（海外第 n 国）の状態価格密度過程 π_t（同 $\hat{\pi}_t^n$）は，国内（海外第 n 国）の金利期間構造の状態価格密度過程 ρ_t（同 $\hat{\rho}_t^n$）と指数マルチンゲール ν_t（同 $\hat{\nu}_t^n$）の積で表される.

$$\pi_t = \rho_t \, \nu_t, \qquad \hat{\pi}_t^n = \hat{\rho}_t^n \, \hat{\nu}_t^n, \tag{2.3}$$

ここで，指数マルチンゲール ν_t（同 $\hat{\nu}_t^n$）のボラティリティは，潜在ファクター Y_t（同 Y_t）のアフィン関数である.

$$\frac{d\nu_t}{\nu_t} = -\Lambda_t^Y \, dB_t^Y, \qquad \frac{d\hat{\nu}_t^n}{\hat{\nu}_t^n} = -\hat{\Lambda}_{nt}^Y \, dB_t^Y, \tag{2.4}$$

ここで，

$$\Lambda_t^Y = \lambda_Y + \Lambda_Y Y_t, \qquad \hat{\Lambda}_{nt}^Y = \hat{\lambda}_Y^n + \Lambda_Y Y_t, \tag{2.5}$$

2. 国内（海外）のリスクの市場価格 Λ_t^X（同 $\hat{\Lambda}_{nt}^X$）は，潜在ファクター X_t（同 X_t）のアフィン関数である.

$$\Lambda_t^X = \lambda_X + \Lambda_X X_t, \qquad \hat{\Lambda}_{nt}^X = \hat{\lambda}_X^n + \Lambda_X X_t, \tag{2.6}$$

ここで，$K_X + \Sigma_X \Lambda_X$ は正則である.

3. 国内（海外第 n 国）の瞬間的スポット・レート r_t（同 $\hat{r}_{nt}$）は潜在ファクター X_t（同 X_t）のアフィン関数である.

$$r_t = r_0 + r' X_t, \qquad \hat{r}_{nt} = \hat{r}_{n0} + \hat{r}_n' X_t. \tag{2.7}$$

4. 国内（海外第 n 国）の配当過程 D_t（同 $\hat{D}_{nt}$）は潜在ファクター X_t（同 X_t）の次式で表される関数である.

$$D_t^j = (d_j^0 + d_j' X_t) \exp(b_j^0 t + b_j' X_t), \qquad \hat{D}_{nt}^j = (\hat{d}_{nj}^0 + \hat{d}_{nj}' X_t) \exp(\hat{b}_{nj}^0 t + \hat{b}_{nj}' X_t). \tag{2.8}$$

2.2. 証券価格過程と予算制約式

以下では，物価連動債の満期までの期間を $\tau = T - t$ と表記する.

補題 1. 仮定 *1*・*2* の下，次が成立する.

1. 国内証券の無裁定実質価格過程は次を満たしている.

$$\frac{dP_t}{P_t} = r_t \, dt, \qquad P_0 = 1, \tag{2.9}$$

$$\frac{dP_t^T}{P_t^T} = \left(r_t + b'(\tau)\Sigma_X \Lambda_t^X\right) dt + b'(\tau)\Sigma_X \, dB_t^X, \qquad P_T^T = 1, \tag{2.10}$$

ここで，$b(\tau)$ は次式で与えられている.

$$b(\tau) = r(K_X + \Sigma_X \Lambda_X)'^{-1}\Big(e^{-\tau(K_X + \Sigma_X \Lambda_X)'} - I_M\Big). \tag{2.11}$$

$$\frac{dS_t^j}{S_t^j} = \left(r_t + b_j'\Sigma_X\Lambda_t^X\right) dt + b_j'\Sigma\, dB_t^X, \tag{2.12}$$

ここで，b_j は次式で与えられている．

$$b_j = (K_X + \Sigma_X\Lambda_X)'^{-1}(d_j - r). \tag{2.13}$$

2. 海外第 n 国との無裁定実質為替レート過程 ε_{nt} は次を満たしている．

$$\begin{aligned}\frac{d\varepsilon_{nt}}{\varepsilon_{nt}} = \{&r_t - \hat{r}_{nt} + (\lambda_X - \hat{\lambda}_X^n)'\Lambda_t^X + (\lambda_Y - \hat{\lambda}_Y^n)'\Lambda_t^Y\}dt \\ &+ (\lambda_X - \hat{\lambda}_X)'dB_t^X + (\lambda_Y - \hat{\lambda}_Y^n)'dB_t^Y.\end{aligned} \tag{2.14}$$

3. 海外第 n 国証券の円建て無裁定実質価格過程は次を満たしている．

$$\begin{aligned}\frac{d(\hat{P}_{nt}^T\varepsilon_t)}{\hat{P}_{nt}^T\varepsilon_{nt}} = &\left\{r_t + \left(\hat{b}_n'(\tau)\Sigma_X + (\lambda_X - \hat{\lambda}_X^n)'\right)\Lambda_t^X + (\lambda_Y - \hat{\lambda}_Y^n)'\Lambda_t^Y\right\} dt \\ &+ \left(\hat{b}_n'(\tau)\Sigma_X + (\lambda_X - \hat{\lambda}_X^n)'\right) dB_t^X + (\lambda_Y - \hat{\lambda}_Y^n)'\, dB_t^Y,\end{aligned} \tag{2.15}$$

ここで，$\hat{b}_n(\tau)$ は次の常微分方程式の解である．

$$\frac{d\hat{b}_n(\tau)}{d\tau} = -(K_X + \Sigma_X\Lambda_X)\hat{b}_n(\tau) - \hat{r}_n, \qquad b(0) = 0. \tag{2.16}$$

$$\begin{aligned}\frac{d(\hat{S}_{nt}^j\varepsilon_{nt})}{\hat{S}_{nt}^j\varepsilon_{nt}} = &\left\{r_t + \left(\hat{b}_{nj}'\Sigma_X + (\lambda_X - \hat{\lambda}_X)'\right)\Lambda_t^X + (\lambda_Y - \hat{\lambda}_Y^n)'\Lambda_t^Y\right\} dt \\ &+ \left(\hat{b}_{nj}'\Sigma_X + (\lambda_X - \hat{\lambda}_X^n)'\right) dB_t^X + (\lambda_Y - \hat{\lambda}_Y^n)'\, dB_t^Y,\end{aligned} \tag{2.17}$$

ここで，$\hat{b}_{nj}$ は次式で与えられている．

$$\hat{b}_{nj} = (K_X + \Sigma_X\Lambda_X)'^{-1}(\hat{d}_{nj} - \hat{r}_n). \tag{2.18}$$

証明. 補論 A.1 参照. □

留意点 1. *(2.14)* 式は為替レートが内外金利差に加え，世界経済の実物面に関するリスクの市場価格の内外価格差と為替レートに関するリスクの市場価格の内外価格差により変動することを表している．為替レートの変動要因として，内外金利差は指摘されて久しいが，世界経済の実物面に関するリスクの市場価格の内外価格差と為替レートに関するリスクの市場価格の内外価格差は，筆者の知り得る限り，指摘されたことを聞かない，非常に興味深い結果である．また，*(2.15)(2.17)* 式は，その帰結として，海外証券の円建て価格のボラティリティに世界経済の実物面に関するリスクの市場価格の内外価格差と為替レートに関するリスクの市場価格の内外価格差が現れており，これも興味深い結果である．

国内（海外第 n 国）の第非債券 j 指数に対する投資比率を Φ_t^j（同 $\hat{\Phi}_{nt}^j$）と表記する．また，海外第 n 国の投資対象主要指数を $\hat{J}_n$ 種類とする．

物価連動債については，任意の満期の物価連動債を投資対象としているため，富に対する投資比率密度過程が最適化の対象となる．そこで，国内（海外第 n 国）の物価連動債の富に対する投資比率密度過程を $\varphi_t(\tau)$（同 $\hat{\varphi}_{nt}(\tau)$）と表記する[1]．以下では，次の記法を用いる．

$$\Psi_t^P = \int_0^{\bar{\tau}} \varphi_t(\tau) b'(\tau)\, d\tau\, \Sigma_X, \qquad \Psi_t^S = \sum_{j=1}^{J} \Phi_t^j b_j' \Sigma_X,$$

$$\hat{\Psi}_{Xt}^P = \sum_{n=1}^{N} \int_0^{\hat{\tau}_n} \hat{\varphi}_{nt}(\tau) \left(\hat{b}_n'(\tau)\Sigma_X + \left(\lambda_X - \hat{\lambda}_X^n\right)' \right) d\tau,$$

$$\hat{\Psi}_{Xt}^S = \sum_{n=1}^{N} \sum_{j=1}^{\hat{J}_n} \hat{\Phi}_{nt}^j \left(\hat{b}_{nj}'\Sigma_X + \left(\lambda_X - \hat{\lambda}_X^n\right)' \right),$$

$$\hat{\Psi}_{Yt}^P = \sum_{n=1}^{N} \int_0^{\bar{\tau}_n} \hat{\varphi}_{nt}(\tau)\, d\tau \left(\lambda_Y - \hat{\lambda}_Y^n\right)', \qquad \hat{\Psi}_{Yt}^S = \sum_{n=1}^{N} \sum_{j=1}^{\hat{J}_n} \hat{\Phi}_{nt}^j \left(\lambda_Y - \hat{\lambda}_Y^n\right)',$$

$$\Psi_t^X = \Psi_t^P + \Psi_t^S + \hat{\Psi}_{Xt}^P + \hat{\Psi}_{Xt}^S, \qquad \Psi_t^Y = \hat{\Psi}_{Yt}^P + \hat{\Psi}_{Yt}^S.$$

また，Ψ_t を次式で定義し,「投資過程」乃至は「投資」と略称する．

$$\Psi_t = \begin{pmatrix} \Psi_t^X & \Psi_t^Y \end{pmatrix}. \tag{2.19}$$

このとき，消費者の予算制約式が次の補題で示される．

補題 2. 投資過程 Ψ_t と消費過程 c_t を所与とする．このとき，仮定 *1*・*2* の下，消費財を価値基準財とする実質的富過程 W_t は次の予算制約式を満たす．

$$dW_t = \left\{ W_t \left(r_t + \Psi_t \Lambda_t \right) - c_t \right\} dt + W_t \Psi_t\, dB_t, \tag{2.20}$$

ここで，

$$\Lambda_t = \begin{pmatrix} \Lambda_t^X \\ \Lambda_t^Y \end{pmatrix}, \qquad B_t = \begin{pmatrix} B_t^X \\ B_t^Y \end{pmatrix}.$$

証明. 補論 A.2 参照． □

予算制約式 (2.20) は，富過程が $u_t = (c_t, \Psi_t)$ で決定されることを示しており，消費者の効用最大化問題における制御過程は $u_t = (c_t, \Psi_t)$ であることが分かる．

2.3. 消費者の最適化問題

消費者は予算制約式の下で CRRA 効用を最大化すると仮定する．

仮定 3. 消費者は次の *CRRA* 効用を予算制約式 *(2.20)* の下で最大化する．

$$U(c) = \mathrm{E}\left[\int_0^T \alpha\, e^{-\beta t} \frac{c_t^{1-\gamma}}{1-\gamma} dt + (1-\alpha)\, e^{-\beta T} \frac{W_T^{1-\gamma}}{1-\gamma} \right]. \tag{2.21}$$

[1]尚，このとき，或る特定の満期の物価連動債の投資比率自体を非零とする投資を認めるため，許容される国内（海外第 n 国）の物価連動債投資比率密度関数 φ（同 $\hat{\varphi}_n$）の空間は超関数を含む関数空間とする．

状態過程を$\mathbb{X}'_t = (W_t, X'_t, Y'_t)$と表記する．予算制約式(2.20)を満たす制御過程$u_t = (c_t, \mathit{\Psi}_t)$を初期状態$\mathbb{X}'_0 = (W_0, X'_0, Y'_0)$に対する許容的制御と呼び，許容的制御の集合を$\mathcal{B}(\mathbb{X}_0)$と表記する．このとき,「富を含む状態変数に対する広義の間接効用関数」J（以下,「間接効用関数」と呼ぶ）が次式で定義される．

$$J(t, \mathbb{X}^u_t) = \mathrm{E}_t \left[\int_t^T \alpha\, e^{-\beta t} \frac{c_t^{1-\gamma}}{1-\gamma} dt + (1-\alpha)\, e^{-\beta T} \frac{W_T^{1-\gamma}}{1-\gamma} \right], \qquad \forall t \in [0, T]. \tag{2.22}$$

本稿における消費と投資の最適化問題と価値関数$V(\mathbb{X}_0)$が次式で定義される．

$$V(\mathbb{X}_0) = \sup_{u \in \mathcal{B}(\mathbb{X}_0)} J(0, \mathbb{X}_0). \tag{2.23}$$

3. 最適消費・投資の解析解と最適投資比率

本章では，HJB 方程式から推測された間接効用関数を構成する未知関数の偏微分方程式を導出した後，同方程式を Liu [7] の解析解構成法を用いて，最適消費・投資の解析解を導出し，最適投資比率を示す．

3.1. 間接効用関数（を構成する未知関数）の偏微分方程式の導出

HJB 方程式は次式のように表される．

$$\sup_{u \in \mathcal{B}(\mathbb{X}_0)} \left\{ J_t(t, \mathbb{X}^u) + \mu'_t J_{\mathbb{X}}(t, \mathbb{X}^u) + \frac{1}{2} \mathrm{tr}\left[\Sigma_t \Sigma'_t J_{\mathbb{X}\mathbb{X}}(t, \mathbb{X}^u) \right] + \alpha e^{-\beta t} \frac{c^{1-\gamma}}{1-\gamma} \right\} = 0 \tag{3.1}$$

$$\text{s.t.} \quad J(T, \mathbb{X}^u_T) = (1-\alpha)\, e^{-\beta T} \frac{W_T^{1-\gamma}}{1-\gamma},$$

ここで,

$$\mu_t = \begin{pmatrix} \mu_W \\ \mu_X \\ \mu_Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_t(r_t + \mathit{\Psi}_t \Lambda_t) - c_t \\ K_X(\theta_X - X_t) \\ K_Y(\theta_Y - Y_t) \end{pmatrix}, \qquad \Sigma_t = \begin{pmatrix} W_t \mathit{\Psi}_t^X & W_t \mathit{\Psi}_t^Y \\ \Sigma_X & 0 \\ 0 & \Sigma_Y \end{pmatrix}.$$

HJB 方程式における最大化の必要条件から最適制御過程$u^* = (c^*, \mathit{\Psi}^*)$は次式を満たしている．

$$c_t^* = \alpha^{\frac{1}{\gamma}} e^{-\frac{\beta}{\gamma} t} J_W^{-\frac{1}{\gamma}}, \tag{3.2}$$

$$\mathit{\Psi}_t^* = \frac{\psi_t}{W_t^{*2} J_{WW}}, \tag{3.3}$$

ここで,

$$\psi_t = -W_t^* \left\{ J_W \begin{pmatrix} \Lambda_t^X \\ \Lambda_t^Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Sigma'_X J_{XW} \\ \Sigma'_Y J_{YW} \end{pmatrix} \right\}'. \tag{3.4}$$

HJB 方程式における消費関連項については，最適消費の必要条件から,

$$-c_t^* J_W + \alpha e^{-\beta t} \frac{c_t^{*1-\gamma}}{1-\gamma} = \frac{c_t^*}{1-\gamma} \left\{ (\gamma - 1) J_W + \alpha e^{-\beta t} c_t^{*-\gamma} \right\} = \frac{\gamma}{1-\gamma} c_t^* J_W, \tag{3.5}$$

を得る．同投資関連項については，最適投資の必要条件から，

$$W_t^* J_W \Psi_t^* \Lambda_t + W_t^* \Psi_t^{X*} \Sigma_X' J_{XW} + W_t^* \Psi_t^{Y*} \Sigma_Y' J_{YW} = -W_t^{*2} J_{WW} \Psi_t^* \left(\Psi_t^*\right)', \tag{3.6}$$

が成立していることに注意すると，

$$W_t^* J_W \Psi_t^* \Lambda_t + \frac{1}{2} \operatorname{tr} \left[\begin{pmatrix} W_t^* \Psi_t^{X*} & W_t^* \Psi_t^{Y*} \\ \Sigma_X & 0 \\ 0 & \Sigma_Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_t^* \Psi_t^{X*} & W_t^* \Psi_t^{Y*} \\ \Sigma_X & 0 \\ 0 & \Sigma_Y \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} J_{WW} & J_{WX} & J_{WY} \\ J_{XW} & J_{XX} & J_{XY} \\ J_{YW} & J_{YX} & J_{YY} \end{pmatrix} \right]$$

$$\begin{aligned} &= W_t^* J_W \Psi_t^* \Lambda_t \\ &+ \frac{1}{2} \operatorname{tr} \left[\begin{pmatrix} W_t^{*2} \left(\Psi_t^{X*} \left(\Psi_t^{X*}\right)' + \Psi_t^{Y*} \left(\Psi_t^{Y*}\right)' \right) & W_t^* \Psi_t^{X*} \Sigma_X' & W_t^* \Psi_t^{Y*} \Sigma_Y' \\ W_t^* \Sigma_X \left(\Psi_t^{X*}\right)' & \Sigma_X \Sigma_X' & 0 \\ W_t^* \Sigma_Y \left(\Psi_t^{Y*}\right)' & 0 & \Sigma_Y \Sigma_Y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_{WW} & J_{WX} & J_{WY} \\ J_{XW} & J_{XX} & J_{XY} \\ J_{YW} & J_{YX} & J_{YY} \end{pmatrix} \right] \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{tr} \left[\Sigma_X \Sigma_X' J_{XX} + \Sigma_Y \Sigma_Y' J_{YY} \right] - \frac{\psi_t \psi_t'}{2 W_t^{*2} J_{WW}}, \end{aligned} \tag{3.7}$$

が得られる．

よって，最適消費 (3.2) 式と最適投資 (3.3) 式を HJB 方程式 (3.1) に代入し，(3.5)(3.7) 両式を用いて整理すると，次の間接効用関数 J に関する偏微分方程式が得られる．

$$\begin{aligned} J_t + \frac{1}{2} \operatorname{tr} \left[\Sigma_X \Sigma_X' J_{XX} + \Sigma_Y \Sigma_Y' J_{YY} \right] - \frac{\psi_t \psi_t'}{2 W_t^{*2} J_{WW}} \\ + r_t W_t^* J_W + \{K_X(\theta_X - X_t)\}' J_X + \{K_Y(\theta_Y - Y_t)\}' J_Y + \frac{\gamma}{1-\gamma} c_t^* J_W = 0. \end{aligned} \tag{3.8}$$

上記偏微分方程式から間接効用関数 J は未知関数 $G(t, X_t, Y_t)$ を用いて次の関数形で表されると推測される．

$$J(t, \mathbb{X}_t) = e^{-\beta t} \frac{W_t^{1-\gamma}}{1-\gamma} \left(G(t, X_t, Y_t) \right)^{\gamma}. \tag{3.9}$$

従って，HJB 方程式左辺の最大化の十分条件は，次式で表される Hessian $\mathbf{H}$ が任意の制御変数 $(c, \Psi) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N$ に対し負定符号であることで確認出来る．

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} -\alpha\gamma e^{-\beta t} c^{-\gamma-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\gamma e^{-\beta t} W_t^{1-\gamma} G^{\gamma} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -\gamma e^{-\beta t} W_t^{1-\gamma} G^{\gamma} \end{pmatrix}. \tag{3.10}$$

間接効用関数 J を偏微分し，(3.2)(3.3) 式に代入して，偏微分結果とともに偏微分方程式 (3.8) に代入すると，次の命題を得る．

命題 1. 仮定 *1-3* の下，本問題 *(2.23)* の間接効用関数，最適消費，最適投資は，それぞれ *(3.9)* 式，*(3.11)* 式，*(3.12)* 式で表される．間接効用関数を構成する関数 $G(t, X_t, Y_t)$ は偏微分方程式 *(3.13)* の解である．

$$c_t^* = \alpha^{\frac{1}{\gamma}} \frac{W_t^*}{G}, \tag{3.11}$$

$$\Psi_t^* = \frac{1}{\gamma} \begin{pmatrix} \Lambda_t^X \\ \Lambda_t^Y \end{pmatrix}' + \begin{pmatrix} \Sigma_X' \frac{G_X}{G} \\ \Sigma_Y' \frac{G_Y}{G} \end{pmatrix}', \tag{3.12}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}G(t,X_t,Y_t)+\mathcal{L}G(t,X_t,Y_t)+\alpha^{\frac{1}{\gamma}}=0,$$
$$G(T,X_T,Y_T)=(1-\alpha)^{\frac{1}{\gamma}}, \quad (3.13)$$

ここで，$\mathcal{L}$ は次式で定義される線形微分作用素である．

$$\begin{aligned}\mathcal{L}G&=\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\left[\Sigma_X\Sigma_X' G_{XX}+\Sigma_Y\Sigma_Y' G_{YY}\right]\\&+\left(K_X(\theta_X-X)-\frac{\gamma-1}{\gamma}\Sigma_X(\lambda_X+\Lambda_X X)\right)' G_X+\left(K_Y(\theta_Y-Y)-\frac{\gamma-1}{\gamma}\Sigma_Y(\lambda_Y+\Lambda_Y Y)\right)' G_Y\\&-\left\{\frac{\gamma-1}{2\gamma^2}\Big((\lambda_X+\Lambda_X X)'(\lambda_X+\Lambda_X X)+(\lambda_Y+\Lambda_Y Y)'(\lambda_Y+\Lambda_Y Y)\Big)+\frac{\gamma-1}{\gamma}(r_0+r'X)+\frac{\beta}{\gamma}\right\}G.\end{aligned} \quad (3.14)$$

証明. 補論 A.3 参照. □

3.2. 解析解の導出

偏微分方程式 (3.13) は非斉次項 $\alpha^{\frac{1}{\gamma}}$ を含んでおり，解析解の導出を困難にしている．Liu [7] は，同非斉次項を捨象した斉次偏微分方程式 (3.15) の初期値問題の解析解を利用した解析解構成法を提示しているので，我々も同構成法により解析解を導出する．

$$\frac{\partial}{\partial \tau}g(\tau,X,Y)=\mathcal{L}g(\tau,X,Y),$$
$$g(0,X,Y)=1, \quad (3.15)$$

ここで，$\tau=T-t$ である．

偏微分方程式 (3.15) の解は次式で表される．

$$g(\tau,Z)=\exp\left(a_0(\tau)+a'(\tau)Z+\frac{1}{2}Z'A(\tau)Z\right), \quad (3.16)$$

ここで，

$$Z=\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}, \qquad a(\tau)=\begin{pmatrix}a_X(\tau)\\a_Y(\tau)\end{pmatrix}, \qquad A(\tau)=\begin{pmatrix}A_X(\tau) & A_{XY}(\tau)\\A_{XY}'(\tau) & A_Y(\tau)\end{pmatrix}, \quad (3.17)$$

であり，$A_X(\tau)$，$A_Y(\tau)$ は対称行列である．係数体系 $(a_0(\tau),a(\tau),A(\tau))$ は (3.16) 式を (3.15) 式に代入した後に現れる $Z=(X,Y)$ に関する恒等式 (3.19) から導かれる常微分方程式 (3.21)-(3.23) の解となる．

このとき，微分作用素 $\mathcal{L}$ の線形性により，偏微分方程式 (3.13) の解析解が次式で表現されることを確認出来る．

$$G(t,Z)=\alpha^{\frac{1}{\gamma}}\int_0^{T-t}g(s,Z)\,ds+(1-\alpha)^{\frac{1}{\gamma}}g(T-t,Z). \quad (3.18)$$

関数 g（(3.16) 式）に偏微分を施し，偏微分方程式 (3.15) に代入すると，次式を得る．

$$\begin{aligned}
&\frac{da_0}{d\tau}+Z'\frac{da}{d\tau}+\frac{1}{2}Z'\frac{dA}{d\tau}Z \\
&\quad=\frac{1}{2}\operatorname{tr}\Big[\Sigma_X\Sigma_X'\Big(a_Xa_X'+A_X+a_XX'A_X+A_XXa_X'+a_XY'A_{XY}+A_{XY}Ya_X' \\
&\qquad\qquad+A_XXX'A_X+A_XXY'A_{XY}+A_{XY}YX'A_X+A_{XY}YY'A_{XY}'\Big)\Big] \\
&\qquad+\frac{1}{2}\operatorname{tr}\Big[\Sigma_Y\Sigma_Y'\Big(a_Ya_Y'+A_Y+a_YX'A_{XY}+A_{XY}'Xa_Y'+a_YY'A_Y+A_YYa_Y' \\
&\qquad\qquad A_{XY}'XX'A_{XY}+A_{XY}'XY'A_Y+A_YYX'A_{XY}+A_YYY'A_Y\Big)\Big] \\
&\qquad+\left\{K_X\theta_X-\frac{\gamma-1}{\gamma}\Sigma_X\lambda_X-\left(K_X+\frac{\gamma-1}{\gamma}\Sigma_X\Lambda_X\right)X\right\}'(a_X+A_XX+A_{XY}Y) \\
&\qquad+\left\{K_Y\theta_Y-\frac{\gamma-1}{\gamma}\Sigma_Y\lambda_Y-\left(K_Y+\frac{\gamma-1}{\gamma}\Sigma_Y\Lambda_Y\right)Y\right\}'(a_Y+A_{XY}'X+A_YY) \\
&\qquad-\frac{\gamma-1}{2\gamma^2}\Big(\lambda_X'\lambda_X+2\lambda_X'\Lambda_XX+X'\Lambda_X'\Lambda_XX+\lambda_Y'\lambda_Y+2\lambda_Y'\Lambda_YY+Y'\Lambda_Y'\Lambda_YY\Big) \\
&\qquad\qquad-\frac{\gamma-1}{\gamma}(r_0+r'X)-\frac{\beta}{\gamma}. \qquad (3.19)
\end{aligned}$$

次の記法を用いる．

$$\hat{\Sigma}=\begin{pmatrix}\Sigma_X & 0\\ 0 & \Sigma_Y\end{pmatrix},\qquad \lambda=\begin{pmatrix}\lambda_X\\ \lambda_Y\end{pmatrix},\qquad \Lambda=\begin{pmatrix}\Lambda_X & 0\\ 0 & \Lambda_Y\end{pmatrix},$$

$$\hat{K}=\begin{pmatrix}K_X+\frac{\gamma-1}{\gamma}\Sigma_X\Lambda_X & 0\\ 0 & K_Y+\frac{\gamma-1}{\gamma}\Sigma_Y\Lambda_Y\end{pmatrix},\qquad \hat{k}=\begin{pmatrix}K_X\theta_X-\frac{\gamma-1}{\gamma}\Sigma_X\lambda_X\\ K_Y\theta_Y-\frac{\gamma-1}{\gamma}\Sigma_Y\lambda_Y\end{pmatrix}.$$

このとき，$Z'\hat{K}'AZ=Z'A\hat{K}'Z$ に注意すると，(3.19) 式は次のように整理出来る．

$$\begin{aligned}
\frac{da_0}{d\tau}+Z'\frac{da}{d\tau}+\frac{1}{2}Z'\frac{dA}{d\tau}Z&=\frac{1}{2}\Big(a'\hat{\Sigma}\hat{\Sigma}'a+\operatorname{tr}\Big[\hat{\Sigma}\hat{\Sigma}'A\Big]\Big)+Z'A\hat{\Sigma}\hat{\Sigma}'a+\frac{1}{2}Z'A\hat{\Sigma}\hat{\Sigma}'Z \\
&\quad+\hat{k}a-Z'\hat{K}'a-\frac{1}{2}Z'\hat{K}'AZ-\frac{1}{2}Z'A\hat{K}Z \\
&\quad-\frac{\gamma-1}{2\gamma^2}\lambda'\lambda-\frac{\gamma-1}{\gamma^2}Z'\Lambda'\lambda-\frac{\gamma-1}{2\gamma^2}Z'\Lambda'\Lambda Z-\frac{\gamma-1}{\gamma}r_0-\frac{\gamma-1}{\gamma}Z'\begin{pmatrix}r\\0\end{pmatrix}-\frac{\beta}{\gamma}. \qquad (3.20)
\end{aligned}$$

上式は変数 $Z=(X,Y)$ に関する恒等式なので，次の (a_0,a,A) に関する常微分方程式が導出される．

$$\frac{da_0}{d\tau}=\frac{1}{2}\Big(a'\hat{\Sigma}\hat{\Sigma}'\,a+\operatorname{tr}\Big[\hat{\Sigma}\hat{\Sigma}'A\Big]\Big)+\hat{k}'a-\left(\frac{\gamma-1}{2\gamma^2}\lambda'\lambda+\frac{\gamma-1}{\gamma}r_0+\frac{\beta}{\gamma}\right),\quad a(0)=0, \qquad (3.21)$$

$$\frac{da}{d\tau}=\big(A\hat{\Sigma}\hat{\Sigma}'-\hat{K}\big)a+A\hat{k}-\frac{\gamma-1}{\gamma^2}\Lambda'\lambda-\frac{\gamma-1}{\gamma}\begin{pmatrix}r\\0\end{pmatrix},\qquad a(0)=0, \qquad (3.22)$$

$$\frac{dA}{d\tau}=A\hat{\Sigma}\hat{\Sigma}'A-\hat{K}'A-A\hat{K}-\frac{\gamma-1}{\gamma^2}\Lambda'\Lambda,\qquad A(0)=0. \qquad (3.23)$$

次の記法を用いる．

$$
\begin{aligned}
a^*(t,Z_t) &= \frac{\alpha^{\frac{1}{\gamma}}\int_0^\tau g(s,Z_t)a(s)\,ds+(1-\alpha)^{\frac{1}{\gamma}}g(\tau,Z_t)a(\tau)}{\alpha^{\frac{1}{\gamma}}\int_0^\tau g(s,Z_t)\,ds+(1-\alpha)^{\frac{1}{\gamma}}g(\tau,Z_t)},\\
A^*(t,Z_t) &= \frac{\alpha^{\frac{1}{\gamma}}\int_0^\tau g(s,Z_t)A(s)\,ds+(1-\alpha)^{\frac{1}{\gamma}}g(\tau,Z_t)A(\tau)}{\alpha^{\frac{1}{\gamma}}\int_0^\tau g(s,Z_t)\,ds+(1-\alpha)^{\frac{1}{\gamma}}g(\tau,Z_t)}.
\end{aligned}
$$

このとき，次の命題を得る．

命題 2. *仮定 1-3 の下，本問題 (2.23) の最適消費及び最適投資は次を満たしている．*

$$
c_t^* = \frac{\alpha^{\frac{1}{\gamma}}W_t^*}{\alpha^{\frac{1}{\gamma}}\int_0^\tau g(s,Z_t)\,ds+(1-\alpha)^{\frac{1}{\gamma}}g(\tau,Z_t)}, \tag{3.24}
$$

$$
\begin{aligned}
\Psi_t^* &= \frac{1}{\gamma}\big(\lambda+\Lambda Z_t\big)'+\Big\{\hat{\Sigma}'\Big(a^*(t,Z_t)+A^*(t,Z_t)Z_t\Big)\Big\}'\\
&= \frac{1}{\gamma}\begin{pmatrix}\lambda_X+\Lambda_X X_t\\ \lambda_Y+\Lambda_Y Y_t\end{pmatrix}'+\begin{pmatrix}\Sigma_X'\Big(a_X^*(t,Z_t)+A_X^*(t,Z_t)X_t+A_{XY}^*(t,Z_t)Y_t\Big)\\ \Sigma_Y'\Big(a_Y^*(t,Z_t)+A_{XY}^*(t,Z_t)'X_t+A_Y^*(t,Z_t)Y_t\Big)\end{pmatrix}',
\end{aligned} \tag{3.25}
$$

ここで，(a_0,a,A) は *(3.26)-(3.28)* 式で表され，A は対称行列である．

$$
a_0(\tau)=\int_0^\tau\left\{\frac{1}{2}\Big(a(s)'\hat{\Sigma}\hat{\Sigma}'a(s)+\mathrm{tr}[\hat{\Sigma}\hat{\Sigma}'A(s)]\Big)+\hat{k}'a(s)-\left(\frac{\gamma-1}{2\gamma^2}\lambda'\lambda+\frac{\gamma-1}{\gamma}r_0+\frac{\beta}{\gamma}\right)\right\}ds, \tag{3.26}
$$

$$
\begin{aligned}
a(\tau) &= \exp\left(\int_0^\tau\Big(A(s)\hat{\Sigma}\hat{\Sigma}'-\hat{K}\Big)ds\right)\\
&\quad\times\int_0^\tau\left(A(s)\hat{k}-\frac{\gamma-1}{\gamma^2}\Lambda'\lambda-\frac{\gamma-1}{\gamma}\begin{pmatrix}r\\0\end{pmatrix}\right)e^{-\int_0^s\left(A(s)\hat{\Sigma}\hat{\Sigma}'-\hat{K}\right)dt}ds,
\end{aligned} \tag{3.27}
$$

$$
A(\tau)=C_2(\tau)C_1^{-1}(\tau), \tag{3.28}
$$

ここで，

$$
\begin{pmatrix}C_1(\tau)\\ C_2(\tau)\end{pmatrix}=\exp\left(\tau\begin{pmatrix}\hat{K} & -\hat{\Sigma}\hat{\Sigma}'\\ -\frac{\gamma-1}{\gamma^2}\Lambda'\Lambda & -\hat{K}'\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}I_{\bar{N}}\\ 0_{\bar{N}}\end{pmatrix}. \tag{3.29}
$$

証明．補論 A.4 参照． □

3.3. 物価連動債指数を投資対象とする最適投資比率の例

標準ブラウン運動が $\bar{N}$ 次元で，非債券の主要指数が国内 J 種類，海外第 n 国 $\hat{J}_n$ 種類なので，物価連動債については，国内 I 群，海外第 n 国 $\hat{I}_n$ 群の投資対象を $\bar{N}=I+J+\sum_{n=1}^N(\hat{I}_n+\hat{J}_n)$ を満たすように設定することにより，最適投資を決定出来る．本節では，典型的な物価連動債投資戦略として，各国の物価連動債指数を対象とする投資戦略を取り上げ，同戦略における最適投資比率を示す．

「危険証券」(非短期安全証券）の投資比率を表す $\bar{N}\times 1$ ベクトル Φ_t 及び危険証券のボラティリティを表す $\bar{N}\times M$ 行列 B を次のように表記する．

$$\Phi_t = \begin{pmatrix} \Phi_t^P \\ \Phi_t^S \\ \hat{\Phi}_{1t}^P \\ \hat{\Phi}_{1t}^S \\ \vdots \\ \hat{\Phi}_{Nt}^P \\ \hat{\Phi}_{Nt}^S \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} B^P \\ B^S \\ \hat{B}_1^P \\ \hat{B}_1^S \\ \vdots \\ \hat{B}_N^P \\ \hat{B}_N^S \end{pmatrix}. \tag{3.30}$$

また，次の記法を用いる．

$$\Delta\Lambda^X = \begin{pmatrix} 0_{M\times(I+J)} & \Delta\Lambda_1^X & \Delta\Lambda_2^X & \cdots & \Delta\Lambda_N^X \end{pmatrix}, \tag{3.31}$$

$$\Delta\Lambda^Y = \begin{pmatrix} 0_{N\times(I+J)} & \Delta\Lambda_1^Y & \Delta\Lambda_2^Y & \cdots & \Delta\Lambda_N^Y \end{pmatrix}, \tag{3.32}$$

ここで，$\Delta\Lambda_n^X$ は $M\times(\hat{I}_n+\hat{J}_n)$ 行列，$\Delta\Lambda_n^Y$ は $N\times(\hat{I}_n+\hat{J}_n)$ 行列で，次のように定義されている．

$$\Delta\Lambda_n^X = \begin{pmatrix} \lambda_X-\hat{\lambda}_X^n & \lambda_X-\hat{\lambda}_X^n & \cdots & \lambda_X-\hat{\lambda}_X^n \end{pmatrix}, \tag{3.33}$$

$$\Delta\Lambda_n^Y = \begin{pmatrix} \lambda_Y-\hat{\lambda}_Y^n & \lambda_Y-\hat{\lambda}_Y^n & \cdots & \lambda_Y-\hat{\lambda}_Y^n \end{pmatrix}. \tag{3.34}$$

$I=\hat{I}_1=\cdots=\hat{I}_N=1$ とし，消費者が残存期間 τ の各国物価連動債の指数を投資対象とする戦略を採用する場合を考察する．各国物価連動債指数の構成比率密度は $\psi_t(\tau)$ で構成されている．すなわち，

$$\int_0^{\bar{\tau}} \psi_t(\tau)d\tau = \int_0^{\bar{\tau}} \hat{\psi}_{nt}(\tau)d\tau = 1, \quad \forall n\in\{1,\cdots,N\},$$

である．次のように記法を定める．

$$\Phi_t^S = \begin{pmatrix} \Phi_t^1 \\ \Phi_t^2 \\ \vdots \\ \Phi_t^J \end{pmatrix}, \qquad B^P = \int_0^{\bar{\tau}} \psi_t(\tau)b(\tau)'d\tau, \qquad B^S = \begin{pmatrix} b_1' \\ b_2' \\ \vdots \\ b_J' \end{pmatrix},$$

$$\hat{\Phi}_{nt}^S = \begin{pmatrix} \hat{\Phi}_{nt}^1 \\ \hat{\Phi}_{nt}^2 \\ \vdots \\ \hat{\Phi}_{nt}^{\hat{J}_n} \end{pmatrix}, \qquad \hat{B}_n^P = \int_0^{\hat{\tau}_n} \hat{\psi}_{nt}(\tau)\hat{b}_n(\tau)'d\tau, \qquad \hat{B}_n^S = \begin{pmatrix} \hat{b}_{n1}' \\ \hat{b}_{n2}' \\ \vdots \\ \hat{b}_{\hat{J}_n}' \end{pmatrix}, \qquad \forall n\in\{1,\cdots,N\}.$$

このとき，(2.19)(3.25) 両式より，危険証券（非短期安全証券）の最適投資比率 Φ_t は次式で

表される．

$$\varPhi_t = \frac{1}{\gamma}\begin{pmatrix}\Sigma_X' B' + \Delta\Lambda^X \\ \Delta\Lambda^Y\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\lambda_X + \Lambda_X X_t \\ \lambda_Y + \Lambda_Y Y_t\end{pmatrix}' + \begin{pmatrix}\Sigma_X' B' + \Delta\Lambda^X \\ \Delta\Lambda^Y\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\Sigma_X'\Big(a_X^*(t,Z_t) + A_X^*(t,Z_t)X_t + A_{XY}^*(t,Z_t)Y_t\Big) \\ \Sigma_Y'\Big(a_Y^*(t,Z_t) + A_{XY}^*(t,Z_t)'X_t + A_Y^*(t,Z_t)Y_t\Big)\end{pmatrix}'. \tag{3.35}$$

尚，短期安全証券の最適投資比率は，

$$1 - \left(\varPhi_t^P + \sum_{j=1}^{J}\varPhi_t^j\right) - \sum_{n=1}^{N}\left(\hat{\varPhi}_{nt}^P + \sum_{j=1}^{\hat{J}_n}\hat{\varPhi}_{nt},\right), \tag{3.36}$$

である．

留意点 2. 国際証券投資を国内証券投資と比較するため，国内証券のみに投資する場合，すなわち，$\bar{N} = I + J$ で，

$$\varPhi_t = \begin{pmatrix}\varPhi_t^P \\ \varPhi_t^S\end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix}B^P \\ B^S\end{pmatrix}, \tag{3.37}$$

の場合を考察すると，この場合の最適投資比率 $\varPhi_t$ は，

$$\tilde{\varPhi}_t = \frac{1}{\gamma}(\Sigma_X' B')^{-1}\big(\lambda_X + \Lambda_X X_t\big) + (\Sigma_X' B')^{-1}\Sigma_X'\big(a_X + A_X X_t\big), \tag{3.38}$$

と表される．

(3.35)(3.38) 両式を比較すると，国際証券投資における最適投資比率は，為替レートに関する状態過程 Y_t の変化の影響を，第 *1* 項の近視眼的需要では，為替レートに関するリスクの市場価格（$\Lambda_t^Y = \lambda_Y + \Lambda_Y X_t$）の変化を通じて間接的に，第 *2* 項の保険需要項では，直接的に受けている．そして，最適投資比率の同変化に対する感応度は，世界経済の実物面に関するリスクの市場価格の内外価格差 $\Delta\Lambda^X$ と為替レートに関するリスクの市場価格の内外価格差 $\Delta\Lambda^Y$ が影響に影響を受けている．これは，最適投資の決定に際して，既に指摘してきた観測出来ない実物面に関する状態過程 X_t に加え，為替レートに関する状態過程 Y_t，さらに，実物面に関するリスクの市場価格の内外価格差，為替レートに関するリスクの市場価格の内外価格差を高精度で推測することが必要であることを示している．

4.　今後の課題

本稿では，CRRA 効用消費者の長期証券投資の最適化問題に対し，解析解を導出したが，危険回避度と最適投資比率の関数関係等の興味深い比較静学分析は行っていない．これは，最適投資比率の危険回避度による導関数等が簡潔に表現されないため，CRRA 効用関数及びアフィン潜在ファクター証券市場モデルのパラメータを特定しなければ有意義な結果を導けないからである．

家計の模範的アセット・アロケーションへの次なる接近として，ナイトの不確実性下，曖昧性回避的な相似拡大的頑健効用を有する消費者の長期国際証券投資の最適化問題を考察している．相似拡大的頑健効用の場合，HJB 方程式には，非斉次項のみならず非線形項も現れるため，Liu [7] の解析解構成法は適用出来ない．従って，近似解析解を導出することとなる

が，このとき，近似精度の評価が問題となる．相似拡大的頑健効用の特殊な場合が CRRA 効用なので，同近似解の近似精度は，CRRA 効用関数及び証券市場モデルのパラメータを特定出来れば，本稿で導出した厳密解との比較により分析出来る．

CRRA 効用関数及びアフィン潜在ファクター証券市場モデルのパラメータの特定は実証分析を必要としているが，一般性の高いアフィン潜在ファクター証券市場モデルのパラメータ推定にはカルマン・フィルター等の計算負荷の小さくない方法を要するため，これらは今後の課題としたい．

参考文献

[1] 有本卓 (1993),『システムと制御の数理』，岩波書店．

[2] Campbell, J.(1993), “Intertemporal asset pricing without consumption data,” *American Economic Review*, Vol.83, 487-512.

[3] Campbell, J. and Viceira, L.(2002), *Strategic Asset Allocation*, Oxford University Press, Oxford, New York.

[4] Duffie, D. and Kan, R.(1996), “A yield-factor model of interest rates,” *Mathematical Finance*, Vol.6, 379-406.

[5] 菊池健太郎：アフィン潜在ファクター国際証券市場モデル．mimeo (2018)．

[6] M. Leippold, and L. Wu: Design and estimation of multi-currency quadratic models. *Review of Finance*, **11** (2007), 167-207.

[7] Liu, J.(2007), “Portfolio selection in stochastic environments,” *The Review of Financial Studies*, Vol.20, No.1, 1-39.

[8] P. Maenhout(2004) “Robust portfolio rules and asset pricing,” *The Review of Financial Studies*, Vol.17, 951-984.

[9] Mamaysky, H.(2002), “A model for pricing stocks and bonds,” Working paper 02-10, International Center for Finance, Yale School of Management.

A. 証明

A.1. 補題 1 の証明

標準ブラウン運動 B とリスクの市場価格 Λ により，

$$\tilde{B}_t = B_t + \int_0^t \Lambda_s \, ds, \tag{A.1}$$

で定義される確率過程 $\tilde{B}_t$ は，Girsanov の定理より，リスク中立確率測度下の標準ブラウン運動である．よって，リスク中立確率測度の下で，潜在ファクター X_t の確率微分方程式は，

$$\begin{aligned} dX_t &= \left(K_X(\theta_X - X_t) - \Sigma_X \Lambda_t^X\right) dt + \Sigma \, d\tilde{B}_t^X \\ &= \{K_X\theta_X - \Sigma_X\lambda_X - (K_X + \Sigma_X\Lambda_X)X_t\} \, dt + \Sigma \, d\tilde{B}_t^X, \end{aligned}$$

と表現される．

今，物価連動債 P^T を r_t の上に書かれた派生資産と看做すと，r_t は X_t のアフィン関数なので，滑らかな関数 $f(X_t, t)$ により，

$$P_t^T = f(X_t, t), \tag{A.2}$$

と表される．このとき，無裁定条件から，f は次の偏微分方程式の解となっていることが示される．

$$f_t+\{K_X\theta-\Sigma_X\lambda_X-(K_X+\Sigma_X\Lambda_X)X_t\}'f_X+\frac{1}{2}\mathrm{tr}[\Sigma_X\Sigma_X'f_{XX}]-(r_0+r'X_t)f=0,$$
$$f(X_T,T)=1. \quad (\mathrm{A.3})$$

一方，本モデルはアフィン・モデルなので，$\tau=T-t$ とおくと，上記偏微分方程式の解 f は滑らかな関数 $b_0(\tau),b(\tau)$ によって

$$f(X_t,t)=e^{b^0(\tau)+b(\tau)'X_t}, \qquad (b^0(0),b(0))=(0,0), \quad (\mathrm{A.4})$$

と書けることが示される．(A.4) 式に偏微分を施し，(A.3) 式に代入すると，次式を得る．

$$-\frac{db^0(\tau)}{d\tau}-\frac{db(\tau)'}{d\tau}X_t+b(\tau)'\{K_X\theta_X-\Sigma_X\lambda_X-(K_X+\Sigma_X\Lambda_X)X_t\}$$
$$+\frac{1}{2}b'(\tau)\Sigma_X\Sigma_X'b(\tau)-(r_0+r'X_t)=0. \quad (\mathrm{A.5})$$

(A.5) 式は X_t の恒等式であるから，X_t の係数を整理すると，次式を得る．

$$\frac{db(\tau)}{d\tau}=-(K_X+\Sigma_X\Lambda_X)'b(\tau)-r, \qquad b(0)=0. \quad (\mathrm{A.6})$$

上式を定数変化法により解くと，(2.11) 式を得る．最後に，(A.4) 式を対数微分して P_t^T の確率微分方程式を導出すると，(2.10) 式を得る．

非債券の第 j 指数の配当込みでない価格を S_t^{*j} と表記する．このとき，Mamaysky [9] より，S_t^{*j} は次式で表され，

$$S_t^{*j}=\exp(a_jt+b_j'X_t). \quad (\mathrm{A.7})$$

配当率過程は次式となる．

$$\frac{D_t^j}{S_t^{*j}}=(d_j^0+d_j'X_t). \quad (\mathrm{A.8})$$

(A.7)(A.8) 両式より，配当込み指数に関する無裁定条件から，次式を得る．

$$a_j+b_j'\{K_X\theta_X-\Sigma_X\lambda_X-(K_X+\Sigma_X\Lambda_X)X_t\}$$
$$+\frac{1}{2}b_j'\Sigma_X\Sigma_X'b_j+(d_j^0+d_j'X_t)-(r_0+r'X_t)=0. \quad (\mathrm{A.9})$$

(A.9) 式は X_t の恒等式であるから，X_t の係数を整理すると，(2.13) 式を得る．

為替レートと海外証券価格は，菊池 [5] に沿って証明する．先ず，国内外の金利期間構造の状態価格密度過程は，定義より，次式を満たしている．

$$\frac{d\rho_t}{\rho_t}=-r_tdt-\Lambda_t^X\,dB_t^X, \qquad \frac{d\hat{\rho}_t^n}{\hat{\rho}_t^n}=-\hat{r}_tdt-\hat{\Lambda}_{nt}^X\,dB_t^X. \quad (\mathrm{A.10})$$

次に，国内外の状態価格密度過程の関係については，定義より，次式が成り立っている．

$$\hat{\pi}_t^n=\pi_t^n\varepsilon_t^n. \quad (\mathrm{A.11})$$

よって，(A.11) 式に，(2.3) 式を代入し，自然対数をとると，

$$\log \varepsilon_t^n = \log \hat{\rho}_t^n + \log \hat{\nu}_t^n - \log \rho_t - \log \nu_t. \tag{A.12}$$

上式を伊藤の補題を用いて微分し，(A.10) 式と (2.4) 式を代入すると，(2.14) 式が導かれる．

海外証券については，先ず，第 n 国物価連動債の当該国通貨における無裁定条件から次式が成り立っている．

$$\frac{d\hat{P}_{nt}^T}{\hat{P}_{nt}^T} = \left(\hat{r}_t + \hat{b}_n'(\tau)\Sigma_X \hat{\Lambda}_t^X\right) dt + \hat{b}_n'(\tau)\Sigma_X \, dB_t^X, \tag{A.13}$$

ここで，$\hat{b}(\tau)$ は常微分方程式 (2.16) の解である．

ゆえに，$\hat{P}_{nt}^T \varepsilon_t^n$ を微分し，(2.14) 式と (A.13) 式を代入すると，(2.15) 式が得られる．海外の非債券主要指数についても，同様にして，(2.17) 式を得る．

A.2. 補題 2 の証明

本論では，国内証券価格を価値基準財とする実質価格を対象としてきたが，ここでは先ず，円建ての名目価格を対象とする．すなわち，満期までの期間 τ の国内（海外第 n 国）物価連動債の名目価格を $\tilde{P}_t(\tau)$（同 $\tilde{P}_{nt}(\tau)$），国内（海外第 n 国）主要指数の配当込みでない名目価格を $\tilde{S}_t^{*j}$（同 $\tilde{S}_{nt}^{*j}$）と表記する．また，或る拡散過程に従う一般物価過程を p_t と表記する．

このとき，国内短期安全証券，国内物価連動債，国内主要指数，海外物価連動債，海外主要指数から組成されるポートフォリオを $(\vartheta, (\vartheta(\tau)), (\vartheta^{*j}), (\hat{\vartheta}_n(\tau)), (\hat{\vartheta}_n^{*j}))$ とすると，富の名目価値 $\tilde{W}_t$ は次式で表現される．

$$\tilde{W}_t = \vartheta_t \tilde{P}_t + \int_0^{\bar{\tau}} \vartheta_t(\tau)\tilde{P}_t(\tau)d\tau + \sum_{j=1}^{J} \vartheta_t^{*j}\tilde{S}_t^{*j} + \sum_{n=1}^{N}\int_0^{\hat{\tau}_n} \hat{\vartheta}_{nt}(\tau)\tilde{P}_{nt}(\tau)d\tau + \sum_{n=1}^{N}\sum_{j=1}^{\hat{J}_n} \hat{\vartheta}_{nt}^{*j}\tilde{S}_{nt}^{*j}. \tag{A.14}$$

このとき，配当込み主要指数のポートフォリオは，

$$\vartheta_t^j = \frac{\tilde{S}_t^{*j}}{\tilde{S}_t^j}\vartheta_t^{*j}, \qquad \hat{\vartheta}_t^{nj} = \frac{\tilde{S}_{nt}^{*j}}{\tilde{S}_t^{nj}}\vartheta_{nt}^{*j}, \tag{A.15}$$

で定義され，配当込み主要指数の名目収益率と主要指数の名目収益率の間に，

$$\frac{d\tilde{S}_t^j}{\tilde{S}_t^j} = \frac{d\tilde{S}_t^{*j}}{\tilde{S}_t^{*j}} + \tilde{D}_t^j dt, \qquad \frac{d\tilde{S}_{nt}^j}{\tilde{S}_{nt}^j} = \frac{d\tilde{S}_{nt}^{*j}}{\tilde{S}_{nt}^{*j}} + \tilde{D}_{nt}^j dt, \tag{A.16}$$

が成り立っていることに注意すると，所与の c_t の下，自己資金充足的ポートフォリオ $(\vartheta, (\vartheta(\tau)), (\vartheta^{*j}), (\hat{\vartheta}_n(\tau)), (\hat{\vartheta}_n^{*j}))$ は，次式を満たしている．

$$\begin{aligned}
\frac{d\tilde{W}_t}{\tilde{W}_t} &= \frac{1}{\tilde{W}_t}\Bigg\{\vartheta_t d\tilde{P}_t + \int_0^{\bar{\tau}} \vartheta_t(\tau)d\tilde{P}_t(\tau)d\tau + \sum_{j=1}^{J}\vartheta_t^{*j}\Big(d\tilde{S}_t^{*j} + \tilde{D}_t^j\tilde{S}_t^{*j}dt\Big) \\
&\quad + \sum_{n=1}^{N}\int_0^{\hat{\tau}_n}\hat{\vartheta}_{nt}(\tau)d\tilde{P}_{nt}(\tau)d\tau + \sum_{n=1}^{N}\sum_{j=1}^{\hat{J}_n}\vartheta_{nt}^{*j}\Big(d\tilde{S}_{nt}^{*j} + \tilde{D}_{nt}^j\tilde{S}_{nt}^{*j}dt\Big) - \frac{p_t}{\tilde{W}_t}c_t dt\Bigg\} \\
&= \frac{\vartheta_t\tilde{P}_t}{\tilde{W}_t}\frac{d\tilde{P}_t}{\tilde{P}_t} + \int_0^{\bar{\tau}}\frac{\vartheta_t(\tau)\tilde{P}_t(\tau)}{\tilde{W}_t}\frac{d\tilde{P}_t(\tau)}{\tilde{P}_t(\tau)}d\tau + \sum_{j=1}^{J}\frac{\vartheta_t^j\tilde{S}_t^j}{\tilde{W}_t}\left(\frac{d\tilde{S}_t^{*j}}{\tilde{S}_t^{*j}} + \tilde{D}_t^j dt\right) \\
&\quad + \sum_{n=1}^{N}\int_0^{\hat{\tau}_n}\frac{\hat{\vartheta}_{nt}(\tau)\tilde{P}_{nt}(\tau)}{\tilde{W}_t}\frac{d\tilde{P}_{nt}(\tau)}{\tilde{P}_{nt}(\tau)}d\tau + \sum_{n=1}^{N}\sum_{j=1}^{\hat{J}_n}\frac{\vartheta_{nt}^j\tilde{S}_{nt}^j}{\tilde{W}_t}\left(\frac{d\tilde{S}_{nt}^{*j}}{\tilde{S}_{nt}^{*j}} + \tilde{D}_{nt}^j dt\right) - \frac{c_t}{W_t}dt\Bigg\}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
= &\left(1-\int_0^{\bar{\tau}}\varphi_t(\tau)d\tau-\sum_{j=1}^{J}\varPhi_t^J-\sum_{n=1}^{N}\int_0^{\hat{\tau}_n}\hat{\varphi}_{nt}(\tau)d\tau-\sum_{n=1}^{N}\sum_{j=1}^{\hat{J}_n}\hat{\varPhi}_{nt}^j\right)\frac{d\tilde{P}_t}{\tilde{P}_t}\\
+ &\int_0^{\bar{\tau}}\varphi_t(\tau)\frac{d\tilde{P}_t(\tau)}{\tilde{P}_t(\tau)}d\tau+\sum_{j=1}^{J}\varPhi_t^j\frac{d\tilde{S}_t^j}{\tilde{S}_t^j}+\sum_{n=1}^{N}\int_0^{\hat{\tau}_n}\hat{\varphi}_{nt}(\tau)\frac{d\tilde{P}_{nt}(\tau)}{\tilde{P}_{nt}(\tau)}d\tau+\sum_{n=1}^{N}\sum_{j=1}^{\hat{J}_n}\hat{\varPhi}_{nt}^j\frac{d\tilde{S}_{nt}^j}{\tilde{S}_{nt}^j}-\frac{c_t}{W_t}dt.
\end{aligned}
$$

このとき，各証券の名目収益率の項に，

$$
\frac{d\tilde{S}_t^j}{\tilde{S}_t^j}=\frac{dS_t^j}{S_t^j}+\frac{dp_t}{p_t}+\left(\frac{d\tilde{S}_t^j}{\tilde{S}_t^j}\right)\left(\frac{dp_t}{p_t}\right),
$$

等を代入し整理すると，次式が導かれる．

$$
\begin{aligned}
\frac{dW_t}{W_t} &= \frac{d\tilde{W}_t}{\tilde{W}_t}-\frac{dp_t}{p_t}-\left(\frac{d\tilde{W}_t}{\tilde{W}_t}\right)\left(\frac{dp_t}{p_t}\right)\\
&= \left(1-\int_0^{\bar{\tau}}\varphi_t(\tau)d\tau-\sum_{j=1}^{J}\varPhi_t^J-\sum_{n=1}^{N}\int_0^{\hat{\tau}_n}\hat{\varphi}_{nt}(\tau)d\tau-\sum_{n=1}^{N}\sum_{j=1}^{\hat{J}_n}\hat{\varPhi}_{nt}^j\right)\frac{dP_t}{P_t}\\
&+ \int_0^{\bar{\tau}}\varphi_t(\tau)\frac{dP_t(\tau)}{P_t(\tau)}d\tau+\sum_{j=1}^{J}\varPhi_t^j\frac{dS_t^j}{S_t^j}+\sum_{n=1}^{N}\int_0^{\hat{\tau}_n}\hat{\varphi}_{nt}(\tau)\frac{d\hat{P}_{nt}(\tau)}{\hat{P}_{nt}(\tau)}d\tau+\sum_{n=1}^{N}\sum_{j=1}^{\hat{J}_n}\hat{\varPhi}_{nt}^j\frac{d\hat{S}_{nt}^j}{\hat{S}_{nt}^j}-\frac{c_t}{W_t}dt.
\end{aligned}
$$

上式に，(2.9)(2.10)(2.12)(2.15)(2.17) 式を代入し，整理すると，(2.20) 式を得る．

A.3.　命題 1 の証明

先ず，最適消費は，

$$
c_t^*=\alpha^{\frac{1}{\gamma}}e^{-\frac{\beta}{\gamma}t}J_W^{-\frac{1}{\gamma}}=\alpha^{\frac{1}{\gamma}}e^{-\frac{\beta}{\gamma}t}\left\{e^{-\beta t}(W_t^*)^{-\gamma}G^{\gamma}\right\}^{-\frac{1}{\gamma}}=\alpha^{\frac{1}{\gamma}}\frac{W_t^*}{G},
$$

すなわち，(3.11) 式が得られる．

次に，間接効用関数に偏微分を施すと，次の式群を得る．

$$
J_t=-\beta J,\qquad W_tJ_W=(1-\gamma)J,\qquad J_X=\gamma\,J\frac{G_X}{G},\qquad J_Y=\gamma\,J\frac{G_Y}{G},
$$

$$
W_t^2J_{WW}=-\gamma(1-\gamma)J,\qquad W_tJ_{XW}=\gamma(1-\gamma)J\frac{G_X}{G},\qquad W_tJ_{YW}=\gamma(1-\gamma)J\frac{G_Y}{G},
$$

$$
J_{XX}=\gamma\,J\left\{(\gamma-1)\frac{G_X}{G}\frac{G'_X}{G}+\frac{G_{XX}}{G}\right\},\qquad J_{YY}=\gamma\,J\left\{(\gamma-1)\frac{G_Y}{G}\frac{G'_Y}{G}+\frac{G_{YY}}{G}\right\}.
$$

間接効用関数の偏微分結果より，最適投資 (3.12) 式右辺の分子，分母は次のように表される．

$$
\psi_t=J\left((\gamma-1)\begin{pmatrix}\Lambda_t^X\\ \Lambda_t^Y\end{pmatrix}+\gamma(\gamma-1)\begin{pmatrix}\Sigma'_X\frac{G_X}{G}\\ \Sigma'_Y\frac{G_Y}{G}\end{pmatrix}\right)', \tag{A.17}
$$

$$
W_t^2J_{WW}=\gamma(\gamma-1)J. \tag{A.18}
$$

ゆえに，最適投資 (3.12) 式に (A.17)(A.18) 式を代入すると，(3.12) 式を得る．

間接効用関数 J の偏微分方程式 (3.8) における第 2・3 項は，(A.17)(A.18) 式を代入し整理すると，次式が得られる．

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\big[\Sigma_X\Sigma_X' J_{XX} + \Sigma_Y\Sigma_Y' J_{YY}\big] - \frac{\psi_t\psi_t'}{2W_t^2 J_{WW}} \\
&\quad = \frac{\gamma}{2}\,J\,\mathrm{tr}\left[\Sigma_X\Sigma_X'\left\{(\gamma-1)\frac{G_X}{G}\frac{G_X'}{G} + \frac{G_{XX}}{G}\right\} + \Sigma_Y\Sigma_Y'\left\{(\gamma-1)\frac{G_Y}{G}\frac{G_Y'}{G} + \frac{G_{YY}}{G}\right\}\right] \\
&-\frac{1}{2\gamma(\gamma-1)}J\left((\gamma-1)\begin{pmatrix}\Lambda_t^X\\ \Lambda_t^Y\end{pmatrix} + \gamma(\gamma-1)\begin{pmatrix}\Sigma_X'\frac{G_X}{G}\\ \Sigma_Y'\frac{G_Y}{G}\end{pmatrix}\right)'\left((\gamma-1)\begin{pmatrix}\Lambda_t^X\\ \Lambda_t^Y\end{pmatrix} + \gamma(\gamma-1)\begin{pmatrix}\Sigma_X'\frac{G_X}{G}\\ \Sigma_Y'\frac{G_Y}{G}\end{pmatrix}\right) \\
&\qquad = J\Bigg\{\frac{\gamma}{2}\,\mathrm{tr}\left[\Sigma_X\Sigma_X'\frac{G_{XX}}{G} + \Sigma_Y\Sigma_Y'\frac{G_{YY}}{G}\right] - \frac{\gamma-1}{2\gamma}\Big((\Lambda_t^X)'\Lambda_t^X + (\Lambda_t^Y)'\Lambda_t^Y)\Big) \\
&\qquad\qquad - (\gamma-1)\left((\Lambda_t^X)'\Sigma_X'\frac{G_X}{G} + (\Lambda_t^Y)'\Sigma_Y'\frac{G_Y}{G}\right) \\
&\qquad = \gamma J\Bigg\{\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\left[\Sigma_X\Sigma_X'\frac{G_{XX}}{G} + \Sigma_Y\Sigma_Y'\frac{G_{YY}}{G}\right] - \frac{\gamma-1}{2\gamma^2}\Big((\Lambda_t^X)'\Lambda_t^X + (\Lambda_t^Y)'\Lambda_t^Y\Big) \\
&\qquad\qquad - \frac{\gamma-1}{\gamma}\begin{pmatrix}\Lambda_t^X\\ \Lambda_t^Y\end{pmatrix}'\begin{pmatrix}\Sigma_X' & 0\\ 0 & \Sigma_Y'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{G_X}{G}\\ \frac{G_Y}{G}\end{pmatrix}\Bigg\}. \qquad \text{(A.19)}
\end{aligned}
$$

間接効用関数の偏微分方程式 (3.8) における第 7 項は，(3.2) 式を代入し整理すると，

$$
\frac{\gamma}{1-\gamma}c_t^* J_W = \alpha^{\frac{1}{\gamma}}\frac{W_t^*}{G}\gamma\frac{J}{W_t^*} = \alpha^{\frac{1}{\gamma}}\gamma\,\frac{J}{G}, \qquad \text{(A.20)}
$$

を得る．

(A.19)(A.20) 式等を間接効用関数の偏微分方程式 (3.8) に代入し，両辺に G を乗じ，γJ で除して整理すると，(3.13) 式が得られる．

A.4. 命題 2 の証明

$a_0(\tau)$，$a(\tau)$ がそれぞれ (3.26) 式，(3.27) 式で表されることは容易に確認出来るので，$A(\tau)$ が (3.28) 式で表されることを有本 [1] 定理 5.2 に沿って証明する．$N\times N$ の行列 $C_1(\tau)$，$C_2(\tau)$ に関する線形微分方程式の初期値問題を考察する．

$$
\frac{d}{d\tau}\begin{pmatrix}C_1(\tau)\\ C_2(\tau)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\hat{K} & -\hat{\Sigma}\hat{\Sigma}'\\ -\frac{\gamma-1}{\gamma^2}\Lambda'\Lambda & -\hat{K}'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_1(\tau)\\ C_2(\tau)\end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix}C_1(\tau)\\ C_2(\tau)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}I_{\bar{N}}\\ 0_{\bar{N}}\end{pmatrix}. \qquad \text{(A.21)}
$$

線形微分方程式 (A.21) の解は (3.29) 式で表される．$C_1(\tau)$ は正則であることが証明出来る [2] ので，$A(\tau)$ を (3.28) 式で定義する．このとき，

$$
\frac{d}{d\tau}C_1^{-1}(\tau) = -C_1^{-1}(\tau)\left\{\frac{d}{d\tau}C_1(\tau)\right\}C_1^{-1}(\tau) \qquad \text{(A.22)}
$$

[2] 有本 [1] 定理 5.2 の証明を参照せよ．

となることに注意すると，

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{d\tau}A(\tau) &= \left\{\frac{d}{d\tau}C_2(\tau)\right\}C_1^{-1}(\tau) + C_2(\tau)\frac{d}{d\tau}C_1^{-1}(\tau) \\
&= \left(-\frac{\gamma-1}{\gamma^2}\Lambda'\Lambda C_1(\tau) - \hat{K}'C_2(\tau)\right)C_1^{-1}(\tau) - A(\tau)\left(\hat{K}C_1(\tau) - \Sigma\Sigma'C_2(\tau)\right)C_1^{-1}(\tau) \\
&= A(\tau)\Sigma\Sigma'A(\tau) - \hat{K}'A(\tau) - A(\tau)\hat{K} - \frac{\gamma-1}{\gamma^2}\Lambda'\Lambda,
\end{aligned}
$$

となり，$A(\tau)$ が Riccati 方程式 (3.23) を満たしていることを確認出来る．$A(\tau)$ の一意性は，有本 [1] 定理 5.2 の証明を参照せよ．最後に，$A(\tau)$ の対称性は，Riccati 方程式及び初期値 (3.23) の転値をとったとき，$A(\tau)'$ に関して同一の式が得られるので，解の一意性から $A(\tau)' = A(\tau)$ でなければばならないことによる．