CRR DISCUSSION PAPER SERIES　J

Discussion Paper No. J-65

Epstein-Zin 効用に基づく消費と長期証券投資の最適化問題に対する近似解析解

バトボルド ボロルソフタ・菊池健太郎・楠田浩二

2018 年 8 月

Center for Risk Research
Faculty of Economics
SHIGA UNIVERSITY

1-1-1 BANBA, HIKONE,
SHIGA 522-8522, JAPAN

滋賀大学経済学部附属リスク研究センター
〒522-8522 滋賀県彦根市馬場 1-1-1

Epstein-Zin 効用に基づく消費と長期証券投資の最適化問題に対する近似解析解

バトボルド ボロルソフタ　　菊池 健太郎 *　楠田 浩二 †
滋賀大学大学院博士後期課程　　滋賀大学　　滋賀大学

和文概要　Campbell and Viceira [6] は，危険回避度と異時点間代替弾力性を分離出来る Epstein-Zin 効用を持つ投資家がバシチェック金利モデルに従う短期債と一定満期の長期債に投資する消費と投資の最適化問題を考察し，Hamilton-Jacobi-Bellman 方程式に現れる非斉次項を対数線形近似することで近似解析解を導出している．本稿では，Epstein-Zin 効用を持つ投資家の投資対象を全満期の国債，株式指数等の主要指数に大幅に拡大し，これら証券が一般次元のアフィン潜在ファクター証券市場モデルに従うと仮定して，消費と投資の最適化問題を考察する．我々は上記非斉次項の対数線形近似により近似解析解候補を導出し，近似最適投資が状態変数に依存することを示す．また，近似解析解候補は一般に複数存在することから，これら複数の解候補から最適解を識別するための条件を提示する．

キーワード: 確率的最適化，近似解析解，金融，再帰的効用，最適制御，十分条件

1.　序論

現代証券投資理論では，効率的なポートフォリオを組成するため，分散投資に加えて長期投資が推奨されている．Campbell and Viceira [6] は，長期投資においては安全証券は短期債ではなく長期物価連動債であることを指摘し，金利変動下の消費と株式・債券投資の最適化問題を研究しているが，同問題では，一般に，HJB(Hamilton-Jacobi-Bellman) 方程式は非斉次偏微分方程式となり解析解の導出を困難にする．

他方，従来消費と投資の問題で仮定されてきた CRRA(Constant Relative Risk Aversion) 効用は，投資家の異なる状態間の変動（危険）に対する回避度と異なる時点間の変動に対する回避度を分離出来ないという欠陥を抱えている．多くの実証分析が，典型的個人は異なる状態間の変動（危険）よりも異なる時点間の変動に対し回避的であると示していることを考慮すると，これらを分離出来る効用に基づき，消費と投資の問題を考察することが望ましい．Epstein-Zin 効用（Epstein and Zin [9]）は，これらの変動に対する回避度を分離出来るように CRRA 効用を一般化したものである．

Campbell and Viceira [6] は，同書第 5 章で，短期債と一定満期の長期物価連動債に投資する消費と投資の最適化問題を投資家の Epstein-Zin 効用とバシチェック金利モデルの下で確率制御により解いている．その結果，最適解の導出は非斉次偏微分方程式の求解問題に帰着されている．彼等は同方程式の非斉次項を Campbell [4] の提案した対数線形近似法を応用し，近似解析解を導出している．尚，Kogan and Uppal [10] は，CRRA 効用を持つ投資家が状態変数に金利を含む一般的資産に投資する消費と投資の最適化問題に対し漸近展開により近似解析解を導出しているが，Campbell and Viceira [6] は，同近似解析解が彼等の導出した近似解析解の特殊な場合と解釈出来，しかも近似精度が低いことを指摘している．また，Campbell *et. al.* [5] は，消費・富比率が想定される範囲内であれば，彼等の近似解析

*連絡先 kentaro-kikuchi@biwako.shiga-u.ac.jp

†本研究は JSPS 科研費 26380392 の助成を受けたものである．

解の精度が高いことを示している．

楠田 [12] は，Campbell and Viceira [6] の導出した近似解析解が高次の一般解における低次の候補解に過ぎないことを示した．最近になって，バトボルド・菊池・楠田 [2] は， 証券投資の対象を短期債，全満期の国債，株式指数等の主要指数に拡大したアフィン潜在ファクター証券市場モデルに一般化し，投資家の CRRA 効用に基づく消費と長期証券投資の最適化問題に対し，高次の近似解析解を導出している．また，バトボルド他 [3] は， 同アフィン潜在ファクター証券市場モデルにナイトの不確実性を導入し，投資家の「相似拡大的頑健効用」（Maenhout [14]）に基づく消費と長期証券投資の最適化問題に対し，高次の近似解析解を導出している．

本稿では，アフィン潜在ファクター証券市場モデルの下，投資家の Epstein-Zin 効用に基づく消費と長期証券投資の最適化問題を考察する．

本稿の主要な結果は次の通りである．先ず，消費と投資の最適化問題に対し，Campbell and Viceira [6]，楠田 [12] の近似法を用いて，高次の近似解析解を導出した．導出した近似最適投資は，将来の潜在ファクターの変化に伴う投資機会集合の変化を考慮しない第 1 項の近視眼的動機に基づく需要項（以下「近視眼的需要項」）と，同変化に対し保険を掛ける第 2 項の保険的動機に基づく需要項（以下「保険的需要項」）から成る．Campbell and Viceira [6] で導出されている最適投資では両項とも一定であったのに対し，本稿で導出された近似最適投資では，潜在ファクターの変化が，第 2 項の保険需要項では直接的に，第 1 項の近視眼的需要項ではリスクの市場価格の変化を通じて間接的に，最適投資に影響を与えることが示されている．これは，リスクの市場価格の変化に伴うリスク・プレミアムの変化に加え，将来の潜在ファクターの水準変化に伴う金利等の水準変化等を考慮して，投資家が株式・中長期債投資への投資比率を調整することを意味しているが，極めて自然で合理的な投資行動である．

次に，バトボルド他 [3] が導出した相似拡大的頑健効用の場合の近似最適投資と比較すると，相似拡大的頑健効用の場合は，近視眼的需要項が相対的危険回避度と「相対的曖昧性回避度」の和に反比例するほか，保険的需要項には係数に相対的危険回避度と相対的曖昧性回避度が明示的に現れる．他方，Epstein-Zin 効用の相対的危険回避度・相対的異時点間変動回避度と相似拡大的頑健効用の相対的危険回避度・相対的曖昧性回避度の間に特定の関係がある場合，これらの投資家の投資行動を外部から観察する者にとっては，投資家が何れの効用を持つのかを識別し難いことが示される．

また，Campbell and Viceira [6] がバシチェック金利モデルの下で示している通り，相対的異時点間変動回避度が 1 の場合は非斉次項が対数線形近似するまでもなく対数関数で表され，厳密な解析解を導出した．

最後に，同近似解析解では，近似価値関数における未知パラメータ群の従う連立常微分方程式が導出されているが，同方程式では，解が一般に複数存在しており，これらの候補解から最適解を識別する必要がある．そこで，Agram and Øksendal [1] が示した前進・後退確率微分方程式の最適制御問題の最適解の十分条件を援用して，上記候補解の中から近似最適解を識別する条件を提示した．

本稿の構成は次の通りである．2 章では，アフィン潜在ファクター証券市場モデルと投資家の最適化問題を説明する．3 章で，HJB 方程式から導出される価値関数の偏微分方程式より近似解析解を導出する．4 章で,「相対的異時点間変動回避度」が 1 の場合の解析解を導出する．5 章で，最適解の十分条件を提示し，6 章で，今後の課題を述べる．

2.　アフィン潜在ファクター証券市場モデルと投資家の最適化問題

本章では，先ず，アフィン潜在ファクター証券市場モデルを紹介し，証券価格過程の従う確率微分方程式を示す．次に，投資家の最適化問題を示す．

2.1.　市場環境

無限連続時間の摩擦の無い証券市場経済を考察する．投資家共通の最も有り得べき確率測度と情報構造は完備フィルター付き確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathrm{P})$ によりモデル化されている．ここで，$\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,\infty)}$ は N 次元標準ブラウン運動 B によって生成される自然なフィルター付けである．確率測度 P の下での期待値作用素を E，$\mathcal{F}_t$ の下での期待値作用を E_t と表記する．市場では，1 種類の消費財，安全証券（以下,「短期安全証券」と呼ぶ）,「中長期安全証券」としての満期までの期間が最長 $\bar{\tau}$，額面 1 円，任意の満期の信用リスクの無い割引債（以下,「割引国債」と呼ぶ）[1]，J 種類の非債券の主要指数（株式指数，REIT 指数等）が任意の時点で市場で取引されている．短期安全証券の価格を P 円，満期 T の割引債の価格を P^T 円，非債券の主要指数の配当込みの価格を S^j 円と表記する．消費財空間は，消費過程 c が $\int_0^\infty c_t dt < \infty\ a.s.$ を満たす非負値適合的過程の空間とする．

本稿では，一般性の高い，アフィン潜在ファクター証券市場モデルを仮定する．

仮定 1. N 次元潜在ファクター X_t は次の確率過程に従う．

$$dX_t = K(\theta - X_t)\,dt + \Sigma\,dB_t, \tag{2.1}$$

ここで，θ は N 次元定数ベクトル，K, Σ は $N \times N$ 定数行列である．また，K は次のように対角化可能な正値対称行列である．

$$L = Q^{-1}KQ = \begin{pmatrix} l_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & l_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & l_N \end{pmatrix},$$

ここで，$l_1, l_2, \cdots, l_N > 0$ であることに留意．

国債 (金利の期間構造）については，潜在ファクター X_t のアフィン・モデル（Duffie and Kan [8] ）を仮定し，非債券の主要指数については，Mamaysky [15] の提案したアフィン型モデルにおいて非定常項を捨象したモデルを仮定する．

仮定 2.　*1.* リスクの市場価格 Λ_t，瞬間的スポット・レート r_t は，潜在ファクター X_t のアフィン関数である．

$$\Lambda_t = \lambda + \Lambda X_t, \tag{2.2}$$
$$r_t = r_0 + r' X_t, \tag{2.3}$$

ここで，$K + \Sigma\Lambda$ は正則である．

2. 非債券の主要指数の配当過程 D_t^j は潜在ファクター X_t の次式で表される関数である．

$$D_t^j = (d_{j0} + d_j' X_t)\exp(b_{j0}t + b_j' X_t). \tag{2.4}$$

[1] 厳密には，物価連動債が中長期安全証券であるが，我が国では，直近 20 年間以上，物価安定が継続しているほか，物価連動債は流通量が限定的で，投資対象として組み入れ難いことから，本稿では，国債を近似的に「中長期安全証券」と見做している．

2.2. 証券価格過程

以下では，割引国債の満期までの期間を $\tau = T - t$ と表記する．

補題 1. 仮定 *1*・*2* の下，証券価格過程は次を満たしている．

$$\frac{dP_t}{P_t} = r_t\,dt, \qquad P_0 = 1. \tag{2.5}$$

$$\frac{dP_t^T}{P_t^T} = \left(r_t + b'(\tau)\Sigma\Lambda_t\right)\,dt + b'(\tau)\Sigma\,dB_t, \qquad P_T^T = 1, \tag{2.6}$$

ここで，$b(\tau)$ は次の連立常微分方程式の解である．

$$\frac{db(\tau)}{d\tau} = -(K + \Sigma\Lambda)'b(\tau) - r, \qquad b(0) = 0. \tag{2.7}$$

$$\frac{dS_t^j}{S_t^j} = \left(r_t + b_j'\Sigma\Lambda_t\right)\,dt + b_j'\Sigma\,dB_t, \tag{2.8}$$

ここで，

$$b_j = -(K + \Sigma\Lambda)'^{-1}(r - d_j). \tag{2.9}$$

証明. バトボルド他 [2] の補論 A.1 参照. □

2.3. 投資家の最適化問題

非債券の主要指数に対する投資比率を Φ_t^j と表記する．また，割引国債については，任意の満期の割引国債を投資対象としているため，富に対する投資比率密度過程が最適化の対象となる．そこで，割引国債の富に対する投資比率密度過程を $\varphi_t(\tau)$ と表記する [2]．以下では，次の記法を用いる．

$$\Psi_t = \left(\int_0^{\bar{\tau}} \varphi_t(\tau)b(\tau)\,d\tau + \sum_{j=1}^{J} \Phi_t^j b_j\right)'\Sigma. \tag{2.10}$$

以下，Ψ_t を適宜「投資」と略称する．また，$u_t = (c_t, \Psi_t)$ と表記する．このとき，予算制約式が次の補題で示される．

補題 2. 投資過程 Ψ_t と消費過程 c_t を所与とする．このとき，仮定 *1*・*2* の下，富過程 W_t^u は次の予算制約式を満たす．

$$dW_t^u = \left\{W_t^u\left(r_t + \Psi_t\Lambda_t\right) - c_t\right\}\,dt + W_t^u\Psi_t\,dB_t. \tag{2.11}$$

証明. バトボルド他 [2] の補論 A.2 参照. □

予算制約式 (2.11) は，富過程が $u_t = (c_t, \Psi_t)$ で決定されることを示しており，投資家の効用最大化問題における制御過程は $u_t = (c_t, \Psi_t)$ であることが分かる．

従来，標準的効用として仮定されてきた CRRA 効用は，異時点間代替弾力性の逆数である異時点間消費の変動に対する回避度（本稿では,「相対的異時点間変動回避度」と呼ぶ）が相対的危険回避度と等しいことを仮定している．しかし，多くの実証分析の結果は，典型

[2] 尚，このとき，或る特定の満期の割引国債の投資比率自体を非零とする投資を認めるため，許容される関数 φ の空間は超関数を含む関数空間とする．

的個人が異なる状態間の変動（危険）よりも異なる時点間の変動に対し回避的であることを示している．そこで，本稿では，相対的危険回避度一定効用を拡張し，相対的危険回避度と相対的異時点間変動回避度を分離した Epstein-Zin 効用（Epstein and Zin [9]）を仮定する．尚，Epstein-Zin 効用自体は離散時間で定義されているので，本稿では，Duffie and Epstein [7] による同効用の連続時間版の表現を採用する．

仮定 3. 投資家は次式で再帰的に定義される *Epstein-Zin* 効用汎関数 $U_0(c)$ を予算制約式 *(2.11)* の下で最大化する．

$$U_t(c) = \mathrm{E}_t\left[\int_t^\infty f(c_s, U_s(c))\,ds\right], \qquad \forall t \geq 0, \tag{2.12}$$

ここで，

$$f(c_s, U_s) = \frac{\beta}{1-\zeta}(1-\gamma)U_s\left\{\left(\frac{c_s}{\left((1-\gamma)U_s\right)^{\frac{1}{1-\gamma}}}\right)^{1-\zeta} - 1\right\}, \tag{2.13}$$

ここで，γ は相対的危険回避度，ζ は相対的異時点間変動回避度（異時点間代替弾力性の逆数）である．実証分析の結果を踏まえて，$\gamma > 1$，$\zeta \geq 1$ と仮定する．$\zeta > 1$ の場合，f は *(2.13)* 式で定義され，$\zeta = 1$ の場合，f は次式で定義される．

$$f(c_s, U_s) = \beta(1-\gamma)U_s\left\{\log c_s - \frac{1}{1-\gamma}\log\bigl((1-\gamma)U_s\bigr)\right\}. \tag{2.14}$$

状態過程を $(\mathbb{X}_t^u)' = (W_t^u, X_t')$ と表記する．また，予算制約式 (2.11) を満たす制御過程 $u_t = (c_t, \Psi_t)$ を初期状態 $\mathbb{X}_0' = (W_0, X_0')$ に対する許容的制御と呼び，許容的制御の集合を $\mathcal{B}(\mathbb{X}_0)$ と表記する．このとき，富を含む状態変数を変数とする「広義の間接効用汎関数」J が次式で再帰的に定義される．

$$J(\mathbb{X}_t^u) = \mathrm{E}_t\left[\int_t^\infty f(c_s, J(\mathbb{X}_s^u))\,ds\right], \qquad \forall t \geq 0. \tag{2.15}$$

本稿における消費と投資の最適化問題と価値関数 $V(\mathbb{X}_0)$ が次式で定義される．

$$V(\mathbb{X}_0) = \sup_{u\in\mathcal{B}(\mathbb{X}_0)} J(\mathbb{X}_0). \tag{2.16}$$

3. 一般の Epstein-Zin 効用に対する近似解析解

本章では，一般の Epstein-Zin 効用に対し，HJB 方程式から推測された価値関数を構成する未知関数 $G(X_t)$ の偏微分方程式を導出した後，同方程式の非斉次項を Campbell and Viceira [6]，楠田 [12] の技法で近似して，近似解析解を導出する．

3.1. 価値関数（を構成する未知関数）の偏微分方程式の導出

HJB 方程式は次式のように表される．

$$\begin{aligned}\sup_{u\in\mathcal{B}(\mathbb{X}_0)}&\left\{\begin{pmatrix} W_t\left(r_t + \Psi_t\Lambda_t\right) - c_t \\ K(\theta - X_t)\end{pmatrix}'\begin{pmatrix} J_W(\mathbb{X}_t^u) \\ J_X(\mathbb{X}_t^u)\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\operatorname{tr}\left[\begin{pmatrix} W_t\Psi_t \\ \Sigma\end{pmatrix}\begin{pmatrix} W_t\Psi_t \\ \Sigma\end{pmatrix}'\begin{pmatrix} J_{WW}(\mathbb{X}_t^u) & J_{WX}(\mathbb{X}_t^u) \\ J_{XW}(\mathbb{X}_t^u) & J_{XX}(\mathbb{X}_t^u)\end{pmatrix}\right]\right.\\ &\left.+\frac{\beta(1-\gamma)}{1-\zeta}J(\mathbb{X}_t^u)\left\{\left(\frac{c_t}{\left((1-\gamma)J(\mathbb{X}_t^u)\right)^{\frac{1}{1-\gamma}}}\right)^{1-\zeta} - 1\right\}\right\} = 0, \end{aligned} \tag{3.1}$$

$$\text{s.t.} \quad \lim_{T\to\infty} E[e^{-\nu T}|J(\mathbb{X}_T^u)|] = 0,$$

ここで，ν は或る正の定数である．

HJB 方程式左辺の最大化の必要条件から最適制御 $u^* = (c^*, \Psi^*)$ は次式を満たしている．

$$c_t^* = \beta^{\frac{1}{\zeta}} V_W^{-\frac{1}{\zeta}} \left\{ \left((1-\gamma)V\right)^{\frac{\gamma-\zeta}{(\gamma-1)\zeta}} \right\}, \tag{3.2}$$

$$\Psi_t^* = \frac{\pi_t^*}{W_t^{*2} V_{WW}}, \tag{3.3}$$

ここで，

$$\pi_t^* = -W_t^* \left\{ V_W \Lambda_t' + V_{WX} \Sigma \right\}. \tag{3.4}$$

最適消費 (3.2) 式と最適投資 (3.3) 式を HJB 方程式 (3.1) に代入し，(3.3) 式から導かれる次式，

$$W_t^* V_W \Lambda_t' (\Psi_t^*)' + \frac{1}{2} \operatorname{tr} \left[\begin{pmatrix} W_t^* \Psi_t^* \\ \Sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_t^* \Psi_t^* \\ \Sigma \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} V_{WW} & V_{WX} \\ V_{XW} & V_{XX} \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{2} \operatorname{tr} \left[\Sigma \Sigma' V_{XX} \right] - \frac{\pi_t^* (\pi_t^*)'}{2 W_t^{*2} V_{WW}}, \tag{3.5}$$

に注意して整理すると，次の価値関数 V に関する偏微分方程式が得られる．

$$\frac{1}{2} \operatorname{tr} \left[\Sigma \Sigma' V_{XX} \right] - \frac{\pi_t^* (\pi_t^*)'}{2 W_t^{*2} V_{WW}} + W_t^* r_t V_W + \{K(\theta - X_t)\}' V_X$$
$$- c_t^* V_W + \frac{\beta}{1-\zeta} (c_t^*)^{1-\zeta} \left((1-\gamma)V\right)^{\frac{\gamma-\zeta}{\gamma-1}} - \frac{\beta(1-\gamma)}{1-\zeta} V = 0. \tag{3.6}$$

上記偏微分方程式から価値関数は，状態変数 X_t の未知関数 $G(X_t)$ を用いて次の関数形で表されると推測される．

$$V(\mathbb{X}_t) = \frac{W_t^{1-\gamma}}{1-\gamma} \left(G(X_t)\right)^{\frac{(\gamma-1)\zeta}{\zeta-1}}. \tag{3.7}$$

従って，HJB 方程式左辺の最大化の十分条件は，次式で表される Hessian $\mathbf{H}_{\mathrm{HJB}}$ が任意の制御変数 $(c, \Psi) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N$ に対し負定符号であることで確認出来る．

$$\mathbf{H}_{\mathrm{HJB}} = \begin{pmatrix} -\beta\zeta\left((1-\gamma)V\right)^{1-\frac{1-\zeta}{1-\gamma}} c^{-\zeta} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\gamma (W_t^*)^{-\gamma} \left(G(X_t)\right)^{\frac{(\gamma-1)\zeta}{\zeta-1}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -\gamma (W_t^*)^{-\gamma} \left(G(X_t)\right)^{\frac{(\gamma-1)\zeta}{\zeta-1}} \end{pmatrix}. \tag{3.8}$$

価値関数 V に偏微分を施し，(3.2)(3.3) 両式に代入し，価値関数の偏微分結果とともに偏微分方程式 (3.6) に代入すると，次の命題を得る．

命題 1. *仮定 1-3 の下，本問題 (2.16) の価値関数，最適消費，最適投資は，それぞれ (3.7) 式，(3.9) 式，(3.10) 式で表される．ここで，$G(X_t)$ は偏微分方程式 (3.11) の解である．*

$$c_t^* = \beta^{\frac{1}{\zeta}} \frac{W_t^*}{G}, \tag{3.9}$$

$$\Psi_t^* = \frac{1}{\gamma} \Lambda_t' + \frac{(\gamma-1)\zeta}{\gamma(\zeta-1)} \frac{G_X'}{G} \Sigma, \tag{3.10}$$

$$\frac{\gamma}{2}\operatorname{tr}\left[\Sigma\Sigma'\frac{G_{XX}}{G}\right]+\frac{\gamma-\zeta}{2(\zeta-1)}\frac{G_X'}{G}\Sigma\Sigma'\frac{G_X}{G}+\left\{\gamma K(\theta-X_t)-(\gamma-1)\Sigma\Lambda_t\right\}'\frac{G_X}{G}$$
$$+\frac{\beta^{\frac{1}{\zeta}}\gamma}{G}-\left(\frac{\zeta-1}{2\zeta}\Lambda_t'\Lambda_t+\frac{\gamma(\zeta-1)}{\zeta}r_t+\frac{\beta\gamma}{\zeta}\right)=0. \quad (3.11)$$

証明．補論 A.1 参照． □

3.2. 偏微分方程式の解析解導出の困難

偏微分方程式 (3.11) は非線形項である第 2 項及び非斉次項である第 4 項を含んでおり，解析解の導出を困難にしている．効用汎関数が CRRA 効用（$\gamma=\zeta$）の場合，第 2 項は存在せず，偏微分方程式は次の線形偏微分方程式で表される．

$$\frac{\gamma}{2}\operatorname{tr}\left[\Sigma\Sigma'\frac{G_{XX}}{G}\right]+\left\{\gamma K(\theta-X_t)-(\gamma-1)\Sigma\Lambda_t\right\}'\frac{G_X}{G}$$
$$+\frac{\beta^{\frac{1}{\zeta}}\gamma}{G}-\left(\frac{\zeta-1}{2\zeta}\Lambda_t'\Lambda_t+\frac{\gamma(\zeta-1)}{\zeta}r_t+\frac{\beta\gamma}{\zeta}\right)=0. \quad (3.12)$$

上記偏微分方程式の解法として，Liu [13] は，次の偏微分方程式の初期値問題の解析解が導出出来ることに着目した．

$$-\frac{\partial}{\partial\tau}F(\tau,x)+\mathcal{L}F(\tau,x)=0, \qquad F(0,x)=1. \quad (3.13)$$

ここで，$\mathcal{L}$ は次式で定義される線形微分作用素である．

$$\mathcal{L}F=\frac{1}{\beta^{\frac{1}{\zeta}}\gamma}\Bigg\{\frac{\gamma}{2}\operatorname{tr}\left[\Sigma\Sigma'F_{XX}\right]+\left\{\gamma K(\theta-X_t)-(\gamma-1)\Sigma\Lambda_t\right\}'F_X$$
$$-\left(\frac{\zeta-1}{2\zeta}\Lambda_t'\Lambda_t+\frac{\gamma(\zeta-1)}{\zeta}r_t+\frac{\beta\gamma}{\zeta}\right)F\Bigg\}, \quad (3.14)$$

偏微分方程式 (3.13) の解は，

$$F(\tau,x)=\exp\left(a_0(\tau)+a(\tau)'x+\frac{1}{2}x'A(\tau)x\right), \quad (3.15)$$

と表現でき，係数体系 $(a_0(\tau),a(\tau),A(\tau))$ は (3.15) 式を (3.13) 式に代入した後に現れる x に関する恒等式から導かれる，初期条件 $a_0(0)=0,a(0)=0,A(0)=0$ の Riccati 方程式の解となる．

Kraft *et al.* [11] は，同解析解 F が次式の意味で可積分であれば，微分作用素 $\mathcal{L}$ の線形性により，偏微分方程式 (3.12) の解析解を次式で表現出来ることを示している．

$$G(x)=\int_0^\infty F(\tau,x)d\tau. \quad (3.16)$$

以上の議論より，効用汎関数が CRRA 効用（$\gamma=\zeta$）の場合は Liu [13]，Kraft *et al.* [11] の解析解構成法の適用可能性が検討されるべきである．しかし，効用汎関数が一般の Epstein-Zin 効用の場合に導出される非線形偏微分方程式 (3.11) に，同様に微分作用素を定義しても，非線形項の存在により非線形となるため，Liu [13]，Kraft *et al.* [11] の解析解構成法は適用出来ない．

3.3. 偏微分方程式の非斉次項の対数線形近似

一方，偏微分方程式 (3.11) の数値解法についても，3 変数以上の高次元の場合，有限差分法等の数値解法を適用することは難しい．そこで本稿では，近似解析解の導出を検討する．

近似解析解導出法として，Campbell and Viceira [6] が，消費と 2 証券投資の最適化問題で常微分方程式の近似解析解を導出する際に適用した非斉次項の対数線形近似法に我々は着目した．彼等は，(3.9) 式より，非斉次項 $\beta^{1/\zeta}/G(X_t)$ が消費・富比率 c_t^*/W_t^* と等しく，同比率が安定的であることに着目し，$1/G(X_t)$ を $E[\log\{(\beta^{-1/\zeta}c_t^*)/W_t^*\}]$ の周りで対数線形近似している．但し，この場合，$E[\log\{(\beta^{-1/\zeta}c_t^*)/W_t^*\}]$ は時間変数に依存する．そこで，楠田 [12] は一定値をとる $\lim_{t\to\infty} E[\log\{(\beta^{-1/\zeta}c_t^*)/W_t^*\}]$ の周りで対数線形近似を行っている．本稿も楠田 [12] に従って非斉次項を次のように対数線形近似する．

$$\frac{1}{G(X_t)} \approx g_0 - g_1 \log G(X_t), \tag{3.17}$$

ここで，

$$\begin{aligned} g_0 &= g_1(1-\log g_1), & (3.18)\\ g_1 &= \exp\left(\lim_{t\to\infty} E\left[\log\left(\frac{\beta^{-\frac{1}{\zeta}}c_t^*}{W_t^*}\right)\right]\right). & (3.19)\end{aligned}$$

偏微分方程式 (3.11) における非斉次項 $1/G$ を (3.17) 式で近似し，Λ_t，r_t に，それぞれ (2.2) 式，(2.3) 式を代入すると，次の近似偏微分方程式を得る．

$$\begin{aligned} &\frac{\gamma}{2}\operatorname{tr}\left[\Sigma\Sigma'\frac{G_{XX}}{G}\right] + \frac{\gamma-\zeta}{2(\zeta-1)}\frac{G_X'}{G}\Sigma\Sigma'\frac{G_X}{G} + \left\{\gamma K(\theta - X_t) - (\gamma-1)\Sigma(\lambda+\Lambda X_t)\right\}'\frac{G_X}{G}\\ &- \beta^{\frac{1}{\zeta}}\gamma\, g_1\log G + \beta^{\frac{1}{\zeta}}\gamma\, g_0 - \frac{\zeta-1}{2\zeta}(\lambda+\Lambda X_t)'(\lambda+\Lambda X_t) - \frac{\gamma(\zeta-1)}{\zeta}(r_0 + r'X_t) - \frac{\beta\gamma}{\zeta} = 0. \end{aligned} \tag{3.20}$$

近似偏微分方程式 (3.20) の解が次式で表される X_t の 2 次形式の指数関数であることは容易に推測される．

$$G(X_t) = \exp\left(a_0 + a'X_t + \frac{1}{2}X_t'AX_t\right). \tag{3.21}$$

ここで，A は一般性を失うことなく対称行列である．

このとき，

$$g_1 = \exp\left(-\lim_{t\to\infty} E\left[\log G(X_t)\right]\right) = \exp\left(\lim_{t\to\infty}\left[-a_0 - a'E[X_t] - \frac{1}{2}E[X_t'AX_t]\right]\right), \tag{3.22}$$

は次の補題で計算される．

補題 3. 仮定 *1-3* の下，g_1 は (a_0, a, A) により次式で表される．

$$g_1 = \exp\left(-a_0 - a'\theta - \frac{1}{2}\left(\theta' A\,\theta + \operatorname{tr}\left[(Q^{-1}\Sigma)'MQ^{-1}\Sigma\right]\right)\right), \tag{3.23}$$

ここで，行列 P の第 (i,j) 成分を P_{ij} と表記すると，

$$M_{ij} = \frac{1}{l_i + l_j}(Q'A\,Q)_{ij}.$$

証明. バトボルド他 [2] の補題3の証明参照. □

近似偏微分方程式 (3.20) の解に基づく近似価値関数及び近似最適制御をそれぞれ $\tilde{V}, \tilde{u}^* = (\tilde{c}^*, \tilde{\Psi}^*)$ と定義する.

3.4. 近似解析解

関数 (3.21) に偏微分を施し，偏微分方程式 (3.20) に代入し，g_0 に (3.18) 式を代入すると，次式を得る.

$$\begin{aligned}
&\frac{\gamma}{2}\operatorname{tr}\left[\Sigma\Sigma'\left(aa'+A+aX_t'A+AX_ta'+AX_tX_t'A\right)\right]+\frac{\gamma-\zeta}{2(\zeta-1)}\left(a'+X_t'A\right)\Sigma\Sigma'\left(a+AX_t\right)\\
&\qquad+\big\{\gamma K\theta-(\gamma-1)\Sigma\lambda-\big(\gamma K+(\gamma-1)\Sigma\Lambda\big)X_t\big\}'(a+AX_t)\\
&+\beta^{\frac{1}{\zeta}}\gamma\, g_1(1-\log g_1)-\beta^{\frac{1}{\zeta}}\gamma\, g_1\left(a_0+a'X_t+\frac{1}{2}X_t'AX_t\right)-\frac{\zeta-1}{2\zeta}\left(\lambda'\lambda+2\lambda'\Lambda X_t+X_t'\Lambda'\Lambda X_t\right)\\
&\qquad-\frac{\gamma(\zeta-1)}{\zeta}(r_0+r'X_t)-\frac{\beta\gamma}{\zeta}=0. \qquad (3.24)
\end{aligned}$$

上式は X_t に関する恒等式なので，次の (a_0, a, A) に関する連立方程式が導出される.

$$\frac{(\gamma-1)\zeta}{2(\zeta-1)}A\Sigma\Sigma'A-\big(\gamma K'+(\gamma-1)\Lambda'\Sigma'\big)A-\frac{1}{2}\beta^{\frac{1}{\zeta}}\gamma\, g_1A-\frac{\zeta-1}{2\zeta}\Lambda'\Lambda=0, \qquad (3.25)$$

$$\begin{aligned}
&\frac{(\gamma-1)\zeta}{\zeta-1}A\Sigma\Sigma'a+\gamma(AK\theta-K'a)-(\gamma-1)(A\Sigma\lambda+\Lambda'\Sigma'a)\\
&\qquad-\beta^{\frac{1}{\zeta}}\gamma\, g_1a-\frac{\zeta-1}{\zeta}\Lambda'\lambda-\frac{\gamma(\zeta-1)}{\zeta}r=0, \qquad (3.26)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{(\gamma-1)\zeta}{2(\zeta-1)}a'\Sigma\Sigma'a+\frac{\gamma}{2}\operatorname{tr}[\Sigma\Sigma'A]+\big(\gamma K\theta-(\gamma-1)\Sigma\lambda\big)'a\\
&\qquad+\beta^{\frac{1}{\zeta}}\gamma\, g_1(1-a_0-\log g_1)-\frac{\zeta-1}{2\zeta}\lambda'\lambda-\frac{\gamma(\zeta-1)}{\zeta}r_0-\frac{\beta\gamma}{\zeta}=0, \qquad (3.27)
\end{aligned}$$

ここで，g_1 は (3.23) 式で表されている.

上記価値関数を構成する未知関数が近似偏微分方程式 (3.20) の解として近似されている場合の価値関数，最適消費，最適投資をそれぞれ「近似価値関数」,「近似最適消費」,「近似最適投資」と呼び，それぞれ $\tilde{V}, \tilde{c}^*, \tilde{\Psi}^*$ と表記する．このとき，次の命題を得る.

命題 2. 仮定 *1-3* の下，本問題 *(2.16)* の近似価値関数，近似最適消費，近似最適投資は次を満たしている.

$$\begin{aligned}
\tilde{V}(\tilde{\mathbb{X}}_t^*) &= \frac{\tilde{W}_t^{*1-\gamma}}{1-\gamma}\exp\left[\frac{(\gamma-1)\zeta}{\zeta-1}\left(a_0+a'X_t+\frac{1}{2}X_t'AX_t\right)\right], && (3.28)\\
\tilde{c}_t^* &= \beta^{\frac{1}{\zeta}}\exp\left[-\left(a_0+a'X_t+\frac{1}{2}X_t'AX_t\right)\right]\tilde{W}_t^*, && (3.29)\\
\tilde{\Psi}_t^* &= \frac{1}{\gamma}\left(\lambda+\Lambda X_t\right)'+\frac{(\gamma-1)\zeta}{\gamma(\zeta-1)}\left(a+AX_t\right)'\Sigma. && (3.30)
\end{aligned}$$

ここで，(a_0, a, A) は連立方程式 *(3.25)-(3.27)* の解である.

留意点 1. 近似価値関数を構成する係数体系 (a_0, a, A) に関する代数方程式 *(3.25)-(3.27)* は一般に解が複数存在するので，これら複数の解は本問題の最適解の候補に過ぎない．これら複数の候補解から最適解を識別するための条件は *5* 章で示す．

留意点 2. 近似最適投資が満たす *(3.30)* 式は，将来の状態変数の変化を考慮しない近視眼的動機に基づく「危険証券」の需要を示す第 *1* 項と，同変化に保険を掛けるための保険的動機に基づく需要を示す第 *2* 項から成っているが，第 *2* 項の係数には相対的危険回避度 γ と相対的異時点間変動回避度 ζ が明示的に現れている．これを両回避度が一致する *CRRA* 効用の場合，近似最適投資が満たす式は，*(3.30)* から

$$\tilde{\Psi}_t^* = \frac{1}{\gamma}\left(\lambda + \Lambda X_t\right)' + \left(a + AX_t\right)'\Sigma, \tag{3.31}$$

となり，保険的動機に基づく第 *2* 項の係数に両回避度は明示的に現れなくなる．但し，両回避度は (a, A) に陰伏的に含まれている．

留意点 3. バトボルド他 *[3]* は本問題をナイトの不確実性下で考察し，「相似拡大的頑健効用」（*Maenhout [14]*）を持つ投資家の近似解析解を導いている．同論文では，近似最適投資が満たす式として次式が示されている．

$$\tilde{\Psi}_t^* = \frac{1}{\gamma+\delta}\left(\lambda + \Lambda X_t\right)' + \frac{\gamma(\gamma+\delta-1)}{(\gamma-1)(\gamma+\delta)}\left(a + AX_t\right)'\Sigma, \tag{3.32}$$

ここで，δ は「相対的曖昧性回避度」である．

相対的異時点間変動回避度 ζ と相対的曖昧性回避度 δ が「危険証券」需要に及ぼす影響を *(3.30)*・*(3.32)* 両式で比較すると，保険的動機に基づく「危険証券」の需要には両回避度が明示的に影響を及ぼしているのに対し，近視眼的動機に基づく需要には相対的異時点間変動回避度 ζ は影響を及ぼさない一方，相対的曖昧性回避度 δ は影響を及ぼしている．

他方，*Epstein-Zin* 効用 (γ, ζ) を持つ投資家と相似拡大的頑健効用 $(\gamma_{\mathrm{R}}, \delta)$ を持つ投資家の回避度の関係が次の場合，

$$\begin{pmatrix}\gamma\\ \zeta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\gamma_{\mathrm{R}}\\ \delta\end{pmatrix}, \tag{3.33}$$

外部の観察者からは当該投資家が *Epstein-Zin* 効用 (γ, ζ) を持っているのか，相似拡大的頑健効用 $(\gamma_{\mathrm{R}}, \delta)$ を持っているのかを識別し難いということになる．

標準ブラウン運動が N 次元で，非債券の主要指数が J 種類なので，割引国債については，$I(= N - J)$ 群の投資対象を設定することにより，最適投資を決定出来る．次に，典型的な 2 例を示す．

例 1. 投資家が割引国債の満期までの期間を I 群に区分し，各時点において各区分への投資比率密度を一定とする投資戦略を採用する場合を考察する．説明の便宜上，$\tau_0 = 0$，$\tau_I = \bar{\tau}$ と表記し，割引国債の満期までの期間を $(\tau_0, \tau_1], (\tau_1, \tau_2], \cdots, (\tau_{I-1}, \tau_I]$ に区分する．また，投資比率密度過程を $(\varphi_t^1, \varphi_t^2, \cdots, \varphi_t^I)$ とするほか，次のように記法を定める．

$$\Phi_{1t} = \begin{pmatrix}\Phi_{1t}^P\\ \Phi_{1t}^S\end{pmatrix}, \qquad B_1 = \begin{pmatrix}B_1^P\\ B_1^S\end{pmatrix}, \tag{3.34}$$

ここで，

$$\Phi_{1t}^P = \begin{pmatrix} \varphi_t^1(\tau_1-\tau_0) \\ \varphi_t^2(\tau_2-\tau_1) \\ \vdots \\ \varphi_t^I(\tau_I-\tau_{I-1}) \end{pmatrix}, \quad \Phi_{1t}^S = \begin{pmatrix} \Phi_t^1 \\ \Phi_t^2 \\ \vdots \\ \Phi_t^J \end{pmatrix}, \quad B_1^P = \begin{pmatrix} \int_{\tau_0}^{\tau_1} b'(\tau)d\tau \\ \int_{\tau_1}^{\tau_2} b'(\tau)d\tau \\ \vdots \\ \int_{\tau_{I-1}}^{\tau_I} b'(\tau)d\tau \end{pmatrix}, \quad B_1^S = \begin{pmatrix} b_1' \\ b_2' \\ \vdots \\ b_J' \end{pmatrix}.$$

このとき，*(2.10)* 式より，

$$\Psi_{1t}^* = (\Phi_t^*)' B_1 \Sigma,$$

であることに注意すると，*(3.30)* 式より,「危険証券」への近似最適投資比率 $\tilde{\Phi}_{1t}^*$ は次式で表される．

$$\tilde{\Phi}_{1t}^* = \frac{1}{\gamma}(\Sigma' B_1')^{-1}(\lambda + \Lambda X_t) + \frac{(\gamma-1)\zeta}{\gamma(\zeta-1)} B_1'^{-1}(a + AX_t). \tag{3.35}$$

尚，短期安全証券への近似最適投資比率は $1 - \sum_{i=1}^I \tilde{\varphi}_t^{*i}(\tau_i - \tau_{i-1}) - \sum_{j=1}^J \tilde{\Phi}_t^{*j}$ である．

例 2. 投資家は I 種類の一定満期の割引国債を投資対象とする戦略を採用する場合を考察する．投資対象国債の満期を $0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots < \tau_I \le \bar{\tau}$ とし，各満期の国債への投資比率を $\Phi_P^1, \Phi_P^2, \cdots, \Phi_P^I$ とする．次のように記法を定める．

$$\Phi_{2t} = \begin{pmatrix} \Phi_{2t}^P \\ \Phi_{2t}^S \end{pmatrix}, \qquad B_2 = \begin{pmatrix} B_2^P \\ B_2^S \end{pmatrix}, \tag{3.36}$$

ここで，

$$\Phi_{2t}^P = \begin{pmatrix} \Phi_{Pt}^1 \\ \Phi_{Pt}^2 \\ \vdots \\ \Phi_{Pt}^I \end{pmatrix}, \quad \Phi_{2t}^S \begin{pmatrix} \Phi_t^1 \\ \Phi_t^2 \\ \vdots \\ \Phi_t^J \end{pmatrix}, \quad B_2^P = \begin{pmatrix} b'(\tau_1) \\ b'(\tau_2) \\ \vdots \\ b'(\tau_I) \end{pmatrix}, \quad B_2^S = \begin{pmatrix} b_1' \\ b_2' \\ \vdots \\ b_J' \end{pmatrix}.$$

このとき，*(3.30)* 式より,「危険証券」（非短期安全証券）への近似最適投資比率 $\tilde{\Phi}_{2t}^*$ は次式で表される．

$$\tilde{\Phi}_{2t}^* = \frac{1}{\gamma}(\Sigma' B_2')^{-1}(\lambda + \Lambda X_t) + \frac{(\gamma-1)\zeta}{\gamma(\zeta-1)} B_2'^{-1}(a + AX_t). \tag{3.37}$$

尚，短期安全証券への近似最適投資比率は $1 - \sum_{i=1}^I \tilde{\Phi}_{Pt}^{*i} - \sum_{j=1}^J \tilde{\Phi}_t^{*j}$ である．

4. $\zeta = 1$ の場合の解析解

本章では，Epstein-Zin 効用において，相対的異時点間変動回避度（異時点間代替弾力性の逆数）が 1 の場合の解析解を導出する．

4.1. 価値関数（を構成する未知関数）の偏微分方程式の導出

相対的異時点間変動回避度が 1 のとき，本稿における消費と投資の最適化問題と価値関数 $V(\mathbb{X}_0)$ が次式で定義される．

$$V(\mathbb{X}_0) = \sup_{u \in \mathcal{B}(\mathbb{X}_0)} \mathrm{E}\left[\int_0^\infty \beta(1-\gamma)V(\mathbb{X}_t)\left\{\log c_t - \frac{1}{1-\gamma}\log\bigl((1-\gamma)V(\mathbb{X}_t)\bigr)\right\}dt\right]. \tag{4.1}$$

HJB 方程式は次式のように表される．

$$\sup_{u\in\mathcal{B}(\mathbb{X}_0)}\left\{\begin{pmatrix} W_t\,(r_t+\Psi_t\Lambda_t)-c_t \\ K(\theta-X_t)\end{pmatrix}'\begin{pmatrix} J_W(\mathbb{X}_t^u) \\ J_X(\mathbb{X}_t^u)\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\left[\begin{pmatrix} W_t\Psi_t \\ \Sigma\end{pmatrix}\begin{pmatrix} W_t\Psi_t \\ \Sigma\end{pmatrix}'\begin{pmatrix} J_{WW}(\mathbb{X}_t^u) & J_{WX}(\mathbb{X}_t^u) \\ J_{XW}(\mathbb{X}_t^u) & J_{XX}(\mathbb{X}_t^u)\end{pmatrix}\right]\right.$$
$$\left.+\beta(1-\gamma)J(\mathbb{X}_t^u)\left\{\log c_t-\frac{1}{1-\gamma}\log\bigl((1-\gamma)J(\mathbb{X}_t^u)\bigr)\right\}\right\}=0, \quad (4.2)$$

$$\text{s.t.}\quad \lim_{T\to\infty}E[e^{-\nu T}|J(\mathbb{X}_t^u)|]=0,$$

ここで，ν は或る正の定数である．

前章と同様に最適化を行うと，価値関数は状態変数 X_t の未知関数 $h(X_t)$ を用いて次式で推測され，

$$V(\mathbb{X}_t)=\frac{W_t^{1-\gamma}}{1-\gamma}h(X_t), \quad (4.3)$$

次の命題を得る．

命題 3. 仮定 *1-3* の下，本問題 *(4.1)* の価値関数，最適消費，最適投資は，それぞれ *(4.3)* 式，*(4.4)* 式，*(4.5)* 式で表される．ここで，$h(X_t)$ は偏微分方程式 *(4.6)* の解である．

$$\hat{c}_t = \beta\hat{W}_t, \quad (4.4)$$
$$\hat{\Psi}_t = \frac{1}{\gamma}\Lambda_t'+\frac{1}{\gamma}\frac{h_X'}{h}\Sigma, \quad (4.5)$$

$$\frac{\gamma}{2}\,\mathrm{tr}\left[\Sigma\Sigma'\frac{h_{XX}}{h}\right]-\frac{\gamma-1}{2}\frac{h_X'}{h}\Sigma\Sigma'\frac{h_X}{h}+\bigl\{\gamma K(\theta-X_t)-(\gamma-1)\Sigma\Lambda_t\bigr\}'\frac{h_X}{h}$$
$$-\beta\gamma\log h-\left\{\frac{\gamma-1}{2}\Lambda_t'\Lambda_t+\gamma(\gamma-1)\bigl\{r_t+\beta(\log\beta-1)\bigr\}\right\}=0. \quad (4.6)$$

証明．補論 A.2 参照． □

価値関数を構成する未知関数 h の偏微分方程式 (4.6) は，異時点間変動回避度が一般の場合の偏微分方程式における非斉次項が対数関数で表されており，次の関数形の解析解が導出される．

$$h(X_t)=\exp\left(a_0+a'X_t+\frac{1}{2}X_t'AX_t\right), \quad (4.7)$$

ここで，A は一般性を失うことなく対称行列である．

次の命題を得る．

命題 4. 仮定 *1-3* の下，本問題 *(4.1)* の価値関数，最適投資は次を満たしている．

$$V(\hat{\mathbb{X}}_t) = \frac{\hat{W}_t^{1-\gamma}}{1-\gamma}\exp\left[a_0+a'X_t+\frac{1}{2}X_t'AX_t\right], \quad (4.8)$$
$$\hat{\Psi}_t = \frac{1}{\gamma}\,(\lambda+\Lambda X_t)'+\frac{1}{\gamma}\,(a+AX_t)'\,\Sigma, \quad (4.9)$$

ここで，(a_0,a,A) は連立方程式 *(4.10)-(4.12)* の解である．

$$\frac{1}{2}A\Sigma\Sigma'A-\left(\gamma K'+(\gamma-1)\Lambda'\Sigma'+\frac{\beta\gamma}{2}\right)A-\frac{\gamma-1}{2}\Lambda'\Lambda=0, \quad (4.10)$$

$$A\Sigma\Sigma' a + \gamma\big(AK\theta - K'a\big) - (\gamma-1)(A\Sigma\lambda + \Lambda'\Sigma' a) - \beta\gamma a - (\gamma-1)\Lambda'\lambda - \gamma(\gamma-1)r = 0, \quad (4.11)$$

$$\frac{1}{2}a'\Sigma\Sigma' a + \frac{\gamma}{2}\,\mathrm{tr}[\Sigma\Sigma' A] + \big(\gamma K\theta - (\gamma-1)\Sigma\lambda\big)' a$$
$$- \beta\gamma a_0 - \frac{\gamma-1}{2}\lambda'\lambda - \gamma(\gamma-1)r_0 + \beta(1-\log\beta)\gamma(\gamma-1) = 0. \quad (4.12)$$

証明．補論 A.3 参照． □

5.　最適解の十分条件

一般の Epstein-Zin 効用汎関数の場合の最適化問題において導かれた近似価値関数を構成する係数体系 (a_0, a, A) は代数方程式 (3.25)-(3.27) の解であるが，同解は一般に非最適解を含めて複数存在する．本章では，Agram and Øksendal [1] が 1 次元ブラウン運動に基づく確率過程の前進・後退確率微分方程式の無限時間最適制御で展開した理論を多次元ブラウン運動に基づく確率過程の場合に応用して最適解の十分条件を提示する．

5.1.　前進・後退確率微分方程式の最適制御による本問題の再定式化

本問題を Agram and Øksendal [1] において考察されている前進・後退確率微分方程式の無限時間最適制御問題の枠組みで再定式化するため，先ず，次の前進・後退確率微分方程式を考察する．

可測過程 $\mathbb{X}_t^u = (W_t^u, X_t')'$ の前進確率微分方程式：

$$d\mathbb{X}_t^u = \mu(\mathbb{X}_t^u, u_t)\,dt + \sigma(\mathbb{X}_t^u, u_t)\,dB_t, \qquad \mathbb{X}_0^u = \mathbb{X}_0, \quad (5.1)$$

ここで，

$$\mu(\mathbb{X}_t^u, u_t) = \begin{pmatrix} W_t^u\,(r_t + \Psi_t\Lambda_t) - c_t \\ K(\theta - X_t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_t^u\,\{r_0 + \Psi_t\lambda + (r' + \Psi_t\Lambda)X_t\} - c_t \\ K(\theta - X_t) \end{pmatrix}, \quad (5.2)$$

$$\sigma(\mathbb{X}_t^u, u_t) = \begin{pmatrix} W_t^u\Psi_t \\ \Sigma \end{pmatrix}, \qquad \mathbb{X}_0 = (W_0, X_0). \quad (5.3)$$

可測過程 (z_t^u, Z_t^u) の後退確率微分方程式：

$$-dz_t^u = f(c_t, z_t^u)dt - Z_t^u dB_t, \qquad \mathrm{E}\left[\sup_{t\ge 0} e^{kt}(z_t^u)^2 + \int_0^\infty e^{kt}(Z_t^u)^2 dt\right] < \infty, \quad (5.4)$$

ここで，f は (2.13) 式で表されており，k は或る正の定数である．

(5.4) 式より，z_t^u は次式で表現されることに留意せよ．

$$z_t^u = E_t\left[\int_t^T f(c_s, z_s^u)ds + z_T^u\right]. \quad (5.5)$$

このとき，本最適化問題 (2.16) は次のように表現される．

$$z_0^* = \sup_{u\in\mathcal{B}(\mathbb{X}_0)} E\left[\int_0^\infty f(c_t, z_t^u)dt\right]. \quad (5.6)$$

Hamiltonian を定義するための随伴過程 (p_t, q_t, R_t) を次のように表記する．

$$q_t = \begin{pmatrix} q_t^W \\ q_t^X \end{pmatrix}, \qquad R_t = \begin{pmatrix} R_t^W \\ R_t^X \end{pmatrix},$$

ここで，q_t^W はスカラー，q_t^X は $N \times 1$ ベクトル，R_t^W は $1 \times N$ ベクトル，R_t^X は $N \times N$ 行列である．

このとき，Hamiltonian H は次式で定義される．

$$\begin{aligned} &H(\mathbb{X}, z, Z, u, p, q, R) = f(z,u)p + \mu(\mathbb{X},u)'q + \mathrm{tr}[\sigma(\mathbb{X},u)'R] \\ &= \frac{\beta(1-\gamma)}{1-\zeta} z \left\{ \left(\frac{c}{((1-\gamma)z)^{\frac{1}{1-\gamma}}} \right)^{1-\zeta} - 1 \right\} p + \{W\{r_0 + \Psi\lambda + (r' + \Psi\Lambda)X\} - c\} q^W \\ &\qquad + (K\theta - KX)'q^X + \mathrm{tr}\left[\begin{pmatrix} W\Psi \\ \Sigma \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} R^W \\ R^X \end{pmatrix} \right]. \end{aligned} \tag{5.7}$$

5.2. 制御過程及び随伴過程の最適解

問題 (5.6) は次の随伴過程の前進・後退確率微分方程式に関連付けられる．

随伴前進確率微分方程式：

$$dp_t = H_z(\mathbb{X}_t^u, z_t^u, Z_t^u, u_t, p_t, q_t, R_t)dt + H_Z(\mathbb{X}_t^u, z_t^u, Z_t^u, u_t, p_t, q_t, R_t)dB_t, \qquad p_0 = 1. \tag{5.8}$$

随伴後退確率微分方程式：

$$-dq_t = H_{\mathbb{X}}(\mathbb{X}_t^u, z_t^u, Z_t^u, u_t, p_t, q_t, R_t)dt - R_t dB_t, \qquad \mathrm{E}\left[\sup_{t \geq 0} e^{kt}(z_t^u)^2 + \int_0^\infty e^{kt}(Z_t^u)^2 dt \right] < \infty, \tag{5.9}$$

ここで，k は或る正の定数である．

上記随伴前進・後退確率微分方程式に Hamiltonian (5.7) 式を代入して計算すると，次の前進・後退確率微分方程式（初期条件と横断条件は省略）を得る．

$$dp_t = f_z(c_t, z_t^u)p_t dt, \tag{5.10}$$

$$-dq_t = \left(\mu_{\mathbb{X}}(\mathbb{X}_t^u, u_t)q_t + \sum_{n=1}^N \sigma_{\mathbb{X}}^n(\mathbb{X}_t^u, u_t)R_t^n \right) dt - R_t dB_t, \tag{5.11}$$

ここで，$\sigma_{\mathbb{X}}^n, R_t^n$ は各行列の第 n 列を示している．

次の補題を得る．

補題 4. *仮定 1-3 の下，制御過程 $u_t^* = (c_t^*, \Psi_t^*)$ が HJB 方程式 (3.1) の解であり，対応する前進・後退確率微分方程式 (5.1)(5.4) 及び随伴前進・後退確率微分方程式 (5.8)(5.9) が一意の*

解 $(\mathbb{X}_t^*, z_t^*, Z_t^*, p_t^*, q_t^*, R_t^*)$ を持つと仮定する．このとき，$(z_t^*, Z_t^*, p_t^*, q_t^*, R_t^*)$ は次で表される．

$$z_t^* = V(\mathbb{X}_t^*), \tag{5.12}$$

$$Z_t^* = \begin{pmatrix} V_W(\mathbb{X}_t^*) \\ V_X(\mathbb{X}_t^*) \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} W_t^* \Psi_t^* \\ \Sigma \end{pmatrix}, \tag{5.13}$$

$$p_t^* = \exp\left(\int_0^t \frac{\beta(1-\gamma)}{1-\zeta} \left\{ \frac{\zeta-\gamma}{1-\gamma} \left(\frac{c_s^*}{\left((1-\gamma)z_s^*\right)^{\frac{1}{1-\gamma}}} \right)^{1-\zeta} - 1 \right\} ds \right), \tag{5.14}$$

$$q_t^* = p_t^* \begin{pmatrix} V_W(\mathbb{X}_t^*) \\ V_X(\mathbb{X}_t^*) \end{pmatrix}, \tag{5.15}$$

$$\tag{5.16}$$

$$R_t^* = p_t^* \begin{pmatrix} V_{WW}(\mathbb{X}_t^*) & V_{WX}(\mathbb{X}_t^*) \\ V_{XW}(\mathbb{X}_t^*) & V_{XX}(\mathbb{X}_t^*) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_t^* \Psi_t^* \\ \Sigma \end{pmatrix}. \tag{5.17}$$

また，次の条件付き最大値原理が成立する．

$$\mathrm{E}_t[H(\mathbb{X}_t^*, z_t^*, Z_t^*, u_t^*, p_t^*, q_t^*, R_t^*)] \geq \mathrm{E}_t[H(\mathbb{X}_t^*, z_t^*, Z_t^*, u_t, p_t^*, q_t^*, R_t^*)]. \tag{5.18}$$

証明．補論 A.4 参照． □

5.3. 十分条件

Agram and Øksendal [1] の定理 3.1 は，$u^* = (c^*, \Psi^*)$ が最適解であるための十分条件は，前進・後退確率微分方程式 (5.1)(5.4) 及び随伴前進・後退確率微分方程式 (5.8)(5.9) の解の一意的存在を保証する正則条件（横断条件及び成長条件）[3] 及び条件付き最大値原理の成立の下，関数 $(\mathbb{X}, z, Z, u) \to H(\mathbb{X}, z, Z, u, p_t^*, q_t^*, R_t^*)$ が凹関数であることを示している．従って，補題 4 より，$u^* = (c^*, \Psi^*)$ が最適解であるための十分条件は，次の Hessian $\mathbf{H}$ の凹性に帰着される．

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 0 & H_{WX} & 0 & 0 & 0 & H_{W\Psi'} \\ H_{XW} & 0 & 0 & 0 & H_{X\Psi'} & \\ 0 & 0 & H_{zz} & 0 & H_{zc} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H_{cz} & 0 & H_{cc} & 0 \\ H_{\Psi'W} & H_{\Psi'X} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{5.19}$$

ここで，

$$\begin{aligned}
H_{XW} &= p_t^* V_W(\mathbb{X}_t^*)(r + \Lambda'\Psi'), \\
H_{zz} &= \beta(\gamma-\zeta)c^{1-\zeta}\left((1-\gamma)z\right)^{\frac{\gamma+\zeta-2}{1-\gamma}} p_t^*, \\
H_{cz} &= \beta(\gamma-\zeta)c^{-\zeta}\left((1-\gamma)z\right)^{\frac{\zeta-1}{1-\gamma}} p_t^*, \\
H_{cc} &= -\beta\,\zeta\,c^{-\zeta-1}\left((1-\gamma)z\right)^{\frac{\zeta-\gamma}{1-\gamma}} p_t^*, \\
H_{\Psi'W} &= p_t^*\left\{V_W(\mathbb{X}_t^*)(\lambda + \Lambda X) + W_t^* V_{WW}(\mathbb{X}_t^*)(\Psi_t^*)' + \Sigma' V_{XW}(\mathbb{X}_t^*)\right\}, \\
H_{\Psi'X} &= W p_t^* V_W(\mathbb{X}_t^*)\Lambda.
\end{aligned}$$

[3] 本モデルにおける状態変数等は，このままでは正則条件を満たしていないので，正則条件を満たすように，ドリフト及び拡散係数は十分大きな定数以下であると仮定する．

上式群における価値関数 V の偏微分を数値解法で計算できる場合は，最適解の十分条件は上記 Hessian H が負定符号となることである．しかし，第 3 章で議論したように，偏微分方程式 (3.11) は，3 変数以上の高次元の場合，有限差分法等の数値解法を適用することは難しい．そこで，Hessian H に現れる $W_t^*, z_t^*, c_t^*, \Psi_t^*, V(\mathbb{X}_t^*)$ をそれぞれ近似式 $\tilde{W}_t^*, \tilde{z}_t^*, \tilde{c}_t^*, \tilde{\Psi}_t^*, \tilde{V}(\tilde{\mathbb{X}}_t^*)$ に置き換えると，本問題の近似価値関数の最適性を検証するための近似 Hessian $\tilde{\mathbf{H}}$ は次のように表される．

$$\tilde{\mathbf{H}} = \begin{pmatrix} 0 & \tilde{H}_{WX} & 0 & 0 & 0 & \tilde{H}_{W\Psi'} \\ \tilde{H}_{XW} & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{H}_{X\Psi'} \\ 0 & 0 & \tilde{H}_{zz} & 0 & \tilde{H}_{zc} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{H}_{cz} & 0 & \tilde{H}_{cc} & 0 \\ \tilde{H}_{\Psi'W} & \tilde{H}_{\Psi'X} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{5.20}$$

ここで，

$$\begin{aligned}
\tilde{H}_{XW} &= \tilde{p}_t^* \tilde{V}_W(\tilde{\mathbb{X}}_t^*)(r + \Lambda'\Psi'), \\
\tilde{H}_{zz} &= \beta(\gamma - \zeta) c^{1-\zeta} \big((1-\gamma)z\big)^{\frac{\gamma+\zeta-2}{1-\gamma}} \tilde{p}_t^*, \\
\tilde{H}_{cz} &= \beta c^{-\zeta} \big((1-\gamma)z\big)^{\frac{\zeta-1}{1-\gamma}} \tilde{p}_t^*, \\
\tilde{H}_{cc} &= -\beta\,\zeta\, c^{-\zeta-1} \big((1-\gamma)z\big)^{\frac{\zeta-\gamma}{1-\gamma}} \tilde{p}_t^*, \\
\tilde{H}_{\Psi'W} &= \tilde{p}_t^* \left\{ \tilde{V}_W(\tilde{\mathbb{X}}_t^*) + \tilde{W}_t^* \tilde{V}_{WW}(\tilde{\mathbb{X}}_t^*)(\tilde{\Psi}_t^*)' + \Sigma' \tilde{V}_{XW}(\tilde{\mathbb{X}}_t^*) \right\}, \\
\tilde{H}_{\Psi'X} &= W \tilde{p}_t^* \tilde{V}_W(\tilde{\mathbb{X}}_t^*) \Lambda,
\end{aligned}$$

ここで，

$$\begin{aligned}
\tilde{V}_W(\tilde{\mathbb{X}}_t) &= \tilde{W}_t^{*-\gamma} \exp\left[\frac{(\gamma-1)\zeta}{\zeta-1} \left(a_0 + a'X_t + \frac{1}{2} X_t' A X_t \right) \right], \\
\tilde{V}_{WW}(\tilde{\mathbb{X}}_t) &= -\gamma \tilde{W}_t^{*-\gamma-1} \exp\left[\frac{(\gamma-1)\zeta}{\zeta-1} \left(a_0 + a'X_t + \frac{1}{2} X_t' A X_t \right) \right], \\
\tilde{V}_{XW}(\tilde{\mathbb{X}}_t) &= \frac{(\gamma-1)\zeta}{\zeta-1} \tilde{W}_t^{*-\gamma} \exp\left[\frac{(\gamma-1)\zeta}{\zeta-1} \left(a_0 + a'X_t + \frac{1}{2} X_t' A X_t \right) \right] (a + AX_t).
\end{aligned}$$

従って，状態変数・制御変数空間の実用上適切な領域において偏微分方程式の対数線形近似の精度が十分に高く，それゆえ，近似価値関数 (3.28) 式の近似精度が十分に高いのであれば，連立方程式 (3.25)-(3.27) の複数候補解から最適解を識別するための条件として，近似 Hessian $\tilde{\mathsf{H}}$ が負定符号であることを利用出来る．

6. 今後の課題

本稿では，対数線形近似により近似解析解を導いたが，近似最適投資比率の近似精度を分析するには至っていない．近似最適投資比率を厳密解に基づく最適投資比率と比較するためには，証券市場モデルのパラメータを推定した後，価値関数のパラメータの代数方程式を数値解法により解いて近似最適投資比率を算出するほか，厳密解に基づく最適投資比率は非斉次偏微分方程式の数値解法により計算する必要がある．尚，第 4 章で示された相対的異時点間変動回避度 $\zeta = 1$ の厳密解が得られる場合は，最適投資比率と近似最適投資比率が一致する場合なので，近似最適投資比率の近似精度の分析には利用出来ないことに留意されたい．

本稿で仮定された一般性の高いアフィン潜在ファクター証券市場モデルの特定化において，対象証券を株式指数，REIT 指数，短期国債，長期国債に限定した最小限の 3 ファクター・モデルの推定でさえも，カルマン・フィルター推定やベイジアン推定といった計算負担の重い方法で推定しなければならないほか，厳密解に基づく最適投資比率は 3 変数関数の非線形・非斉次偏微分方程式 (3.11) の数値解法により計算しなければならない．以上の点を考慮して，本稿では近似最適投資比率の近似精度の分析を断念せざるを得なかった同分析は独立した論文として検証される価値があり，今後の研究課題である．

参考文献

[1] N. Agram, and B. Øksendal: Infinite horizon optimal control of forward-backward stochastic differential equations with delay. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **259** (2014), 336-349.

[2] バトボルドボロルソフタ，菊池健太郎，楠田浩二：消費と長期証券投資の最適化問題に対する近似解析解．Discussion paper J-60，滋賀大学経済学部附属リスク研究センター (2018)．

[3] バトボルドボロルソフタ，菊池健太郎，楠田浩二：相似拡大的頑健効用投資家の消費と長期証券投資の最適化問題に対する近似解析解．Discussion paper J-61，滋賀大学経済学部附属リスク研究センター (2018)．

[4] J. Campbell: Intertemporal asset pricing without consumption data. *American Economic Review*, **83** (1993), 487-512.

[5] J. Campbell, P. Maenhout, and L. Viceira: Stock market mean reversion and the optimal equity allocation of a long-lived investor. *European Economic Review*, **5** (2001), 269-292.

[6] J. Campbell, and L. Viceira: *Strategic Asset Allocation* (Oxford University Press, Oxford, New York, 2002).

[7] D. Duffie, and L. Epstein: Asset pricing with stochastic differential utility. *Review of Financial Studies*, **5** (1992), 411-436.

[8] D. Duffie, and R. Kan: A yield-factor model of interest rates. *Mathematical Finance*, **6** (1996), 379-406.

[9] L. Epstein, and S. Zin: Substitution, risk aversion, and the temporal behavior of consumption and asset returns: A theoretical framework. *Econometrica*, **57** (1989), 937-969.

[10] L. Kogan, and R. Uppal: Risk aversion and optimal portfolio policies in partial and general equilibrium economies. Working paper 8609, National Bureau of Economic Research (2001).

[11] H. Kraft, F. Seifried, and M. Steffensen: Consumption-portfolio optimization with recurisive utility in incomplete markets. *Finance and Stochastics*, **17(1)** (2013), 161-196.

[12] 楠田浩二：消費と債券投資の多期間最適問題における高次の近似解析解．Discussion paper J-35，滋賀大学経済学部附属リスク研究センター (2013)．

[13] J. Liu: Portfolio selection in stochastic environments. *Review of Financial Studies*, **20(1)** (2007), 1-39.
[14] P. Maenhout: Robust portfolio rules and asset pricing. *The Review of Financial Studies*, **17** (2004), 951-984.
[15] H. Mamaysky: A model for pricing stocks and bonds. Working paper 02-10, International Center for Finance, Yale School of Management (2002).

A. 証明

A.1. 命題 1 の証明

先ず，最適消費は，

$$c_t^* = \beta^{\frac{1}{\zeta}} \left(\frac{(1-\gamma)V}{W_t^*} \right)^{-\frac{1}{\zeta}} \big((1-\gamma)V\big)^{\frac{\gamma-\zeta}{(\gamma-1)\zeta}} = \beta^{\frac{1}{\zeta}} {W_t^*}^{\frac{1}{\zeta}} \left(W_t^{*1-\gamma} G^{\frac{(\gamma-1)\zeta}{\zeta-1}} \right)^{\frac{1-\zeta}{(\gamma-1)\zeta}} = \beta^{\frac{1}{\zeta}} \frac{W_t^*}{G}.$$

次に，価値関数に偏微分を施すと，次の式群を得る．

$$W_t^* V_W = (1-\gamma)V, \qquad V_X = \frac{(\gamma-1)\zeta}{\zeta-1} V \frac{G_X}{G}, \qquad W_t^{*2} V_{WW} = -\gamma(1-\gamma)V,$$

$$W_t^* V_{XW} = -\frac{(\gamma-1)^2\zeta}{\zeta-1} V \frac{G_X}{G}, \qquad V_{XX} = \frac{(\gamma-1)\zeta}{\zeta-1} V \left\{ \frac{\gamma\zeta - 2\zeta + 1}{\zeta-1} \frac{G_X}{G} \frac{G_X'}{G} + \frac{G_{XX}}{G} \right\}.$$

価値関数の偏微分結果より，最適投資 (3.3) 式右辺の分子・分母は次のように表される．

$$\hat{\pi}_t = (\gamma-1)V \left(\Lambda_t' + \frac{(\gamma-1)\zeta}{\zeta-1} \frac{G_X'}{G} \Sigma \right), \tag{A.1}$$

$$W_t^{*2} V_{WW} = \gamma(\gamma-1)V. \tag{A.2}$$

ゆえに，最適投資 (3.3) 式に (A.1)(A.2) 式を代入すると，(3.10) 式を得る．

価値関数 V の偏微分方程式 (3.6) における第 2 項までは，(A.1)(A.2) 式を代入し整理すると，次式が得られる．

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \operatorname{tr}\left[\Sigma\Sigma' V_{XX}\right] - \frac{\hat{\pi}_t \hat{\pi}_t'}{2W_t^{*2} V_{WW}} &= \frac{(\gamma-1)\zeta}{2(\zeta-1)} V \operatorname{tr}\left[\Sigma\Sigma' \left(\frac{\gamma\zeta - 2\zeta + 1}{\zeta-1} \frac{G_X}{G} \frac{G_X'}{G} + \frac{G_{XX}}{G} \right) \right] \\
&\quad - \frac{\gamma-1}{2\gamma} V \left(\Lambda_t + \frac{(\gamma-1)\zeta}{\zeta-1} \Sigma' \frac{G_X}{G} \right)' \left(\Lambda_t + \frac{(\gamma-1)\zeta}{\zeta-1} \Sigma' \frac{G_X}{G} \right) \\
&= V \left\{ \frac{(\gamma-1)\zeta}{2(\zeta-1)} \operatorname{tr}\left[\Sigma\Sigma' \frac{G_{XX}}{G} \right] - \frac{\gamma-1}{2\gamma} \Lambda_t' \Lambda_t - \frac{(\gamma-1)^2\zeta}{\gamma(\zeta-1)} \Lambda_t' \Sigma' \frac{G_X}{G} \right. \\
&\qquad \left. - \frac{(\gamma-1)\zeta(\gamma-\zeta)}{2\gamma(\zeta-1)^2} \frac{G_X'}{G} \Sigma\Sigma' \frac{G_X}{G} \right\}.
\end{aligned} \tag{A.3}$$

価値関数の偏微分方程式 (3.6) における第 5・6 項は，

$$-V_W + \beta (c_t^*)^{-\zeta} \big((1-\gamma)V\big)^{\frac{\gamma-\zeta}{\gamma-1}} = 0, \tag{A.4}$$

に注意し，最後に (3.2) 式を代入すると，

$$
\begin{aligned}
&-c_t^* V_W + \frac{\beta}{1-\zeta}(c_t^*)^{1-\zeta}\big((1-\gamma)V\big)^{\frac{\gamma-\zeta}{\gamma-1}} \\
&\quad = c_t^*\left\{-V_W + \beta(c_t^*)^{-\zeta}\big((1-\gamma)V\big)^{\frac{\gamma-\zeta}{\gamma-1}}\right\} + \frac{\zeta}{1-\zeta}\beta(c_t^*)^{1-\zeta}\big((1-\gamma)V\big)^{\frac{\gamma-\zeta}{\gamma-1}} \\
&\quad = \frac{\zeta}{1-\zeta}c_t^* V_W = \frac{\beta^{\frac{1}{\zeta}}(\gamma-1)\zeta}{\zeta-1}\frac{V}{G}, \qquad \text{(A.5)}
\end{aligned}
$$

を得る．

(A.3)(A.5) 式等を価値関数の偏微分方程式 (3.6) に代入し，両辺を

$$\frac{(\gamma-1)\zeta}{\gamma(\zeta-1)}V$$

で除して整理すると，(3.11) 式が得られる．

A.2.　命題 3 の証明

HJB 方程式 (4.2) における最大化の 1 階の条件から制御変数の最適解 $\bar{c}$ は (A.6) 式を，$\bar{\Psi}$ は (A.7) 式をそれぞれ満たしている．

$$\hat{c}_t = \beta(1-\gamma)\frac{V}{V_W}, \qquad \text{(A.6)}$$

$$\hat{\Psi}_t = \frac{\hat{\pi}_t}{\hat{W}_t^2 V_{WW}}, \qquad \text{(A.7)}$$

ここで，

$$\hat{\pi}_t = -\hat{W}_t\left\{V_W \Lambda_t' + V_{WX}\Sigma\right\}. \qquad \text{(A.8)}$$

最適消費 (A.6) 式と最適投資 (A.7) 式を HJB 方程式 (4.2) に代入し，(4.2) 式から導かれる次式，

$$\hat{W}_t V_W \Lambda_t'(\hat{\Psi}_t)' + \frac{1}{2}\operatorname{tr}\left[\begin{pmatrix}\hat{W}_t\hat{\Psi}_t \\ \Sigma\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{W}_t\hat{\Psi}_t \\ \Sigma\end{pmatrix}'\begin{pmatrix}V_{WW} & V_{WX} \\ V_{XW} & V_{XX}\end{pmatrix}\right] = \frac{1}{2}\operatorname{tr}\left[\Sigma\Sigma' V_{XX}\right] - \frac{\hat{\pi}_t\hat{\pi}_t'}{2\hat{W}_t^2 V_{WW}},$$

に注意して整理すると，次の価値関数 V に関する偏微分方程式が得られる．

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\operatorname{tr}\left[\Sigma\Sigma' V_{XX}\right] - \frac{\hat{\pi}_t\hat{\pi}_t'}{2\hat{W}_t^2 V_{WW}} + \hat{W}_t r_t V_W + \{K(\theta - X_t)\}' V_X \\
&\qquad - \hat{c}_t V_W + \beta(1-\gamma)V\left\{\log\hat{c}_t - \frac{1}{1-\gamma}\log\big((1-\gamma)V\big)\right\} = 0. \qquad \text{(A.9)}
\end{aligned}
$$

価値関数は (4.3) 式で推測されるので，最適消費は (A.6) 式から直ちに (4.4) 式を得る．

次に，価値関数に偏微分を施すと，次の式群を得る．

$$\hat{W}_t V_W = (1-\gamma)V, \qquad V_X = V\frac{h_X}{h}, \qquad \hat{W}_t^{*2} V_{WW} = -\gamma(1-\gamma)V,$$

$$\hat{W}_t V_{XW} = (1-\gamma)V\frac{h_X}{h}, \qquad V_{XX} = V\frac{h_{XX}}{h}.$$

価値関数の偏微分結果より，最適投資 (A.7) 式右辺の分子は (A.10) 式，分母は (A.2) 式のように表される．

$$\hat{\pi}_t = (\gamma - 1)V\left(\Lambda_t' + \frac{h_X'}{h}\Sigma\right) \tag{A.10}$$

ゆえに，最適投資 (A.7) 式に (A.10)(A.2) 式を代入すると，(4.5) 式を得る．

価値関数 V の偏微分方程式 (A.9) における第 2 項までは，(A.10)(A.2) 式を代入し整理すると，次式が得られる．

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\operatorname{tr}\left[\Sigma\Sigma' V_{XX}\right] - \frac{\hat{\pi}_t\hat{\pi}_t'}{2W_t^2 V_{WW}} &= \frac{1}{2}V\operatorname{tr}\left[\Sigma\Sigma'\frac{h_{XX}}{h}\right] - \frac{\gamma-1}{2\gamma}V\left(\Lambda_t + \Sigma'\frac{h_X}{h}\right)'\left(\Lambda_t + \Sigma'\frac{h_X}{h}\right)\\ &= V\left\{\frac{1}{2}\operatorname{tr}\left[\Sigma\Sigma'\frac{h_{XX}}{h}\right] - \frac{\gamma-1}{2\gamma}\Lambda_t'\Lambda_t - \frac{\gamma-1}{\gamma}\Lambda_t'\Sigma'\frac{h_X}{h} - \frac{\gamma-1}{2\gamma}\frac{h_X'}{h}\Sigma\Sigma'\frac{h_X}{h}\right\}. \end{aligned} \tag{A.11}$$

価値関数の偏微分方程式 (A.9) における第 5〜7 項は，

$$\begin{aligned}&-\hat{c}_t V_W + \beta(1-\gamma)V\left\{\log\hat{c}_t - \frac{1}{1-\gamma}\log\big((1-\gamma)V\big)\right\}\\ &\qquad = \beta(1-\gamma)V\left\{-1 + \log\beta + \log\hat{W}_t + \frac{1}{1-\gamma}\log h - \log\hat{W}_t\right\}\\ &\qquad = \beta V\big\{(\log\beta - 1)(\gamma-1) + \log h\big\}. \end{aligned} \tag{A.12}$$

(A.11)(A.12) 式等を価値関数の偏微分方程式 (A.9) に代入し，両辺を V/γ で除して整理すると，(4.6) 式が得られる．

A.3.　命題 4 の証明

関数 (4.7) に偏微分を施し，偏微分方程式 (4.6) に代入すると，次式を得る．

$$\begin{aligned}&\frac{\gamma}{2}\operatorname{tr}\left[\Sigma\Sigma'\left(aa' + A + aX_t'A + AX_ta' + AX_tX_t'A\right)\right] - \frac{\gamma-1}{2}(a' + X_t'A)\Sigma'\Sigma(a + AX_t)\\ &\qquad + \big\{\gamma K\theta - (\gamma-1)\Sigma\lambda - \big(\gamma K + (\gamma-1)\Sigma\Lambda\big)X_t\big\}'(a + AX_t)\\ &\qquad - \beta\gamma\left(a_0 + a'X_t + \frac{1}{2}X_t'AX_t\right) - \frac{\gamma-1}{2}\left(\lambda'\lambda + 2\lambda'\Lambda X_t + X_t'\Lambda'\Lambda X_t\right)\\ &\qquad - \gamma(\gamma-1)(r_0 + r'X_t) + \beta(1-\log\beta)\gamma(\gamma-1) = 0. \end{aligned} \tag{A.13}$$

上式は X_t に関する恒等式なので，(a_0, a, A) に関する連立方程式 (4.10)-(4.12) が導出される．

A.4.　補題 4 の証明

前進・後退確率微分方程式 (5.1)(5.4) 及び随伴前進・後退確率微分方程式 (5.8)(5.9) が一意の解 $(\mathbb{X}_t^*, z_t^*, Z_t^*, p_t^*, q_t^*, R_t^*)$ を持つと仮定されているので，$(\mathbb{X}_t^*, z_t^*, Z_t^*, p_t^*, q_t^*, R_t^*)$ が前進・後退確率微分方程式 (5.1)(5.4) 及び随伴前進・後退確率微分方程式 (5.8)(5.9) を満たしていることを示せば良い．先ず，(z_t^*, Z_t^*) が (5.4) 式を満たしていること，p_t^* が (5.8) 式を満たしていることは直ちに確認出来る．(q_t^*, R_t^*) については，$u_t^* = (c_t^*, \Psi_t^*)$ が代入された HJB 方程式 (3.1) の $V_{\mathbb{X}}$ に (5.15) 式を代入すると，次式が成立している（時間変数は省略，以下同様）．

$$\mu' q^* + \frac{1}{2}\operatorname{tr}\left[\sigma\sigma'\mu_{\mathbb{X}}\right] + \frac{\beta(1-\gamma)}{1-\zeta}z^*\left\{\left(\frac{c^*}{\left((1-\gamma)z^*\right)^{\frac{1}{1-\gamma}}}\right)^{1-\zeta} - 1\right\}\Bigg\} = 0. \tag{A.14}$$

上式を状態変数の第 i 成分 $\mathbb{X}_i$ で偏微分し，整理すると，次式を得る．

$$
\begin{aligned}
&\mu' q^*_{\mathbb{X}_i} + \mu'_{\mathbb{X}_i} q^* + \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\left[\sigma\sigma' q^*_{\mathbb{X}\mathbb{X}_i}\right] + \mathrm{tr}\left[q^*_{\mathbb{X}}\sigma\sigma'_{\mathbb{X}_i}\right] \\
&\qquad + c^*_{\mathbb{X}_i}\left\{\mu'_{c^*} q^* + \beta(c^*)^{-\zeta}\big((1-\gamma)z\big)^{\frac{\zeta-\gamma}{1-\gamma}}\right\} + \Psi^*_{\mathbb{X}_i}\left\{\mu'_{\Psi^*} q^* + \mathrm{tr}\left[q^*_{\mathbb{X}}\sigma\sigma'_{\Psi^*}\right]\right\} = 0. \quad \text{(A.15)}
\end{aligned}
$$

上式における第 6・7 項については，$u^*_t = (c^*_t, \Psi^*_t)$ が最適制御であることに留意すると，

$$
\mu'_{c^*} q^* + \beta(c^*)^{-\zeta}\big((1-\gamma)z^*\big)^{\frac{\zeta-\gamma}{1-\gamma}} = 0, \qquad \mu'_{\Psi^*} q^* + \mathrm{tr}\left[q^*_{\mathbb{X}}\sigma\sigma'_{\Psi^*}\right] = 0.
$$

従って，次式を得る．

$$
\mu' q^*_{\mathbb{X}_i} + \mu'_{\mathbb{X}_i} q^* + \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left[\sigma\sigma' q^*_{\mathbb{X}\mathbb{X}_i}\right] + \mathrm{tr}\left[q^*_{\mathbb{X}}\sigma\sigma'_{\mathbb{X}_i}\right] = 0. \quad \text{(A.16)}
$$

他方，q^*_i を微分すると，伊藤の補題により，次式を得る．

$$
-dq^*_i = -\left(\mu' q^*_{i\mathbb{X}} + \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\left[\sigma\sigma' q^*_{i\mathbb{X}\mathbb{X}}\right]\right) dt - (q^*_{i\mathbb{X}})'\sigma dB_t. \quad \text{(A.17)}
$$

上式を (A.16) 式と $R^*_i = (q^*_{i\mathbb{X}})'\sigma$ を用いて変形すると，(q^*_t, R^*_t) が随伴後退確率微分方程式 (5.9) を満たしていることが確認出来る．

条件付き最大値原理については，(5.18) 式右辺 $\mathrm{E}_t[H(\mathbb{X}^*_t, z^*_t, Z^*_t, c_t, \Psi_t, p^*_t, q^*_t, R^*_t)]$ が HJB 方程式左辺の Ψ_t に関する最適化の結果，Ψ_t には依らないことに注意すると，(5.18) 式右辺が c^*_t で最大化されることを示せば良いが，このことは既に HJB 方程式左辺の最大化で確認した通りである．