



CRR DISCUSSION PAPER SERIES J

Discussion Paper No. J-61

相似拡大的頑健効用投資家の消費と長期証券投資の最適化問題に対する
近似解析解

バトボルド ボロルソフタ・菊池健太郎・楠田浩二

2018年3月

**Center for Risk Research
Faculty of Economics
SHIGA UNIVERSITY**

**1-1-1 BANBA, HIKONE,
SHIGA 522-8522, JAPAN**

滋賀大学経済学部附属リスク研究センター
〒522-8522 滋賀県彦根市馬場 1-1-1

相似拡大的頑健効用投資家の消費と長期証券投資の最適化問題に対する近似解析解

バトボルド ボロルソフタ 菊池 健太郎* 楠田 浩二†
滋賀大学大学院博士後期課程 滋賀大学 滋賀大学

和文概要 世界金融危機以降、想定する確率過程自体を特定出来ない「ナイトの不確実性」を考慮した投資の頑健最適化に対する認識が高まっている。他方、長期証券投資の最適化問題においては、金利変動リスクを考慮し、投資対象に長期投資における安全証券である長期債を組み入れる必要があるが、同問題では、Hamilton-Jacobi-Bellman 方程式に非斉次項が現れ、解析解の導出を困難にする。Campbell and Viceira [5] は同非斉次項を対数線形近似して近似解析解を導出している。最近、楠田 [7] は彼等が導出した近似解析解が高次の一般解における低次の候補解に過ぎないことを示し、バトボルド・菊池・楠田 [2] は証券投資の対象を全満期の国債、株式指数等に拡大したアフィン潜在ファクター証券市場モデルに一般化して、高次の近似解析解を導出している。本稿では、バトボルド他 [2] の一般性の高い証券市場モデルに、ナイトの不確実性を導入し、「相似拡大的頑健効用」(Maenhout [8]) を持つ投資家の最適化問題に対する近似解析解を導出する。「危険証券」への近似最適投資比率は相対的危険回避度のみならず「相対的曖昧性回避度」にも依存することが示される。

キーワード: 確率的最適化, 近似解析解, 金融, 最適制御, 動的計画, ナイトの不確実性

1. 序論

世界金融危機以降、想定する確率過程自体を特定出来ない「ナイトの不確実性」を考慮した投資の頑健最適化の必要性に対する認識が高まっている。ナイトの不確実性下の消費と投資の頑健最適化では、「最悪確率」下でも効用水準を相当程度の水準に維持出来るように消費と投資を決定しなければならない。このため、通常の消費と投資の最適化の前段階として、「最悪確率」の決定が必要となり、通常の消費と投資の決定問題よりも複雑な問題を解くことを余儀なくされる。本稿では、消費と長期証券投資の頑健最適化の問題を考察する。

本問題においては、「ナイトの不確実性」を考慮しない通常の消費と長期証券投資の最適化も容易な問題ではないことに留意されたい。Campbell and Viceira [5] が強調するように、長期投資においては金利変動リスク等を制御するための安全証券は短期債ではなく長期債（厳密には「長期物価連動債」）である。従って、長期投資の問題では、金利変動下で長期債を含む証券投資の最適化問題を解く必要がある。こうした観点から、Campbell and Viceira [5] は金利変動下の消費と株式・債券投資の最適化問題を研究しているが、同問題では、一般に、HJB (Hamilton-Jacobi-Bellman) 方程式は非斉次偏微分方程式となり解析解の導出を著しく困難にする。

Campbell and Viceira [5] は、短期債と一定満期の長期物価連動債に投資する消費と投資の最適化問題を投資家の CRRA (Constant Relative Risk Aversion) 効用とバシチェック金利モデルの下で確率制御により解いているが、HJB 方程式の非斉次項を Campbell [3] の提案した対数線形近似法を応用し、近似解析解を導出している。また、Campbell *et. al.* [4] は、消費・富比率が想定される範囲内であれば、彼等の近似解析解の精度が高いことを示してい

*連絡先 kentaro-kikuchi@biwako.shiga-u.ac.jp

†本研究は JSPS 科研費 26380392 の助成を受けたものである。

る。然るに、楠田 [7] は、Campbell and Viceira [5] の導出した近似解析解が高次の一般解における低次の候補解に過ぎないことを示した。バトボルド・菊池・楠田 [2] は、証券投資の対象を短期債、全満期の国債、株式指数等の代表的指数に拡大したアフィン潜在ファクター証券市場モデルに一般化し、投資家の CRRA 効用に基づく消費と長期証券投資の最適化問題を Campbell and Viceira [5]、楠田 [7] の対数線形近似法を用いて解き、高次の近似解析解を導出している。彼等の導出した「危険証券」の近似最適投資は、将来の潜在ファクターの変化に伴う投資機会集合の変化を考慮しない第 1 項の「近視眼的動機に基づく需要項」と、同変化に対し保険を掛ける第 2 項の「保険的動機に基づく需要項」から成る。Campbell and Viceira [5] で導出されている最適投資では両項とも一定であったのに対し、本稿で導出された近似最適投資では、潜在ファクターの変化が、第 2 項の保険的動機に基づく需要項では直接的に、第 1 項の近視眼的動機に基づく需要項ではリスクの市場価格の変化を通じて間接的に、最適投資に影響を与えることが示されている。

ナイトの不確実性の問題に関しては、Maenhout [8] が「頑健効用」(Anderson, Hansen, and Sargent [1]) に効用関数の有すべき望ましい性質とされる「相似拡大性」を付与した「相似拡大的頑健効用」を提案し、ナイトの不確実性下で相似拡大的頑健効用を持つ投資家が一定金利の下、短期債と株式に投資する消費と投資の最適化問題に解析解を与えている。本稿では、バトボルド他 [2] の一般性の高いアフィン潜在ファクター証券市場モデルにナイトの不確実性下を導入し、相似拡大的頑健効用投資家の消費と長期証券投資の最適化問題を考察する。尚、相似拡大的頑健効用における「相対的曖昧性回避度」が 0 の場合は通常の CRRA 効用となるため、本稿の問題はバトボルド他 [2] の問題を一般化していることに留意されたい。

本稿の主要な結果は次の通り。先ず、効用の頑健性を確保するための最悪確率の決定問題が解かれた後、消費と投資の最適化問題に対し、Campbell and Viceira [5]、楠田 [7] の対数線形近似法により、近似解析解が導出された。バトボルド他 [2] における「危険証券」への近似最適投資では、近視眼的動機に基づく需要項は明示的に相対的危険回避度に反比例し、保険的動機に基づく需要項には相対的危険回避度は明示的には現れていないのに対し、本稿における「危険証券」への近似最適投資では、近視眼的動機に基づく需要項は相対的危険回避度と「相対的曖昧性回避度」の和に反比例し、保険的動機に基づく需要項にも明示的に両回避度が現れている。

本稿の構成は次の通りである。2 章では、アフィン潜在ファクター証券市場モデル、相似拡大的頑健効用、同効用を持つ投資家の最適化問題を説明する。3 章で、最悪確率を決定し、同確率を織り込んだ HJB 方程式から値関数の非斉次偏微分方程式を導出する。4 章で、同偏微分方程式の非斉次項を対数線形近似し、近似解析解を導出する。5 章で、今後の課題を述べる。

2. アフィン潜在ファクター証券市場モデルと投資家の最適化問題

本章では、先ず、アフィン潜在ファクター証券市場モデルを紹介し、証券価格過程の従う確率微分方程式を示す。次に、相似拡大的頑健効用を紹介し、相似拡大的頑健効用を持つ投資家の消費と投資の最適化問題を示す。

2.1. 市場環境

無限連続時間の摩擦の無い証券市場経済を考察する。ナイトの不確実性下、投資家共通の最も有り得べき確率測度と情報構造は完備フィルター付き確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$ によりモデ

ル化されている。ここで、 $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, \infty)}$ は N 次元標準ブラウン運動 B によって生成される自然なフィルター付けである。確率測度 P の下での期待値作用素を E と表記する。市場では、1種類の消費財、安全証券(以下、「短期安全証券」と呼ぶ)、「中長期安全証券」としての満期までの期間が最長 $\bar{\tau}$ 、額面1円、任意の満期の信用リスクの無い割引債(以下、「割引国債」と呼ぶ)¹、 J 種類の非債券の代表的指数(株式指数、REIT指数等)が任意の時点で市場で取引されている。短期安全証券の価格を P 円、満期 T の割引債の価格を P^T 円、非債券の代表的指数の配当込みの価格を S^j 円と表記する。ここで、 $P_0 = 1$ である。消費財空間は、消費率過程 c が $\int_0^\infty c_t dt < \infty$ a.s. を満たす非負値適合的過程の空間とする。

本稿では、一般性の高い、アフィン潜在ファクター証券市場モデルを仮定する。

仮定 1. N 次元潜在ファクター X_t は次の確率過程に従う。

$$dX_t = K(\theta - X_t) dt + \Sigma dB_t, \quad (2.1)$$

ここで、 θ は N 次元定数ベクトル、 K, Σ は $N \times N$ 定数行列である。また、 K は次のように対角化可能な正値対称行列である。

$$L = Q^{-1}KQ = \begin{pmatrix} l_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & l_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & l_N \end{pmatrix},$$

ここで、 $l_1, l_2, \dots, l_N > 0$ であることに留意。

国債(金利の期間構造)については、状態変数 X_t のアフィン・モデル(Duffie and Kan [6])を仮定し、非債券の代表的指数については、Mamaysky [9]の提案したアフィン型モデルにおいて非定常項を捨象したモデルを仮定する。

仮定 2. 1. リスクの市場価格 Λ_t 、瞬間的スポット・レート r_t は、潜在ファクター X_t のアフィン関数である。

$$\Lambda_t = \lambda + \Lambda X_t, \quad (2.2)$$

$$r_t = r_0 + r' X_t, \quad (2.3)$$

ここで、 $K + \Sigma \Lambda$ は正則である。

2. 非債券の代表的指数の配当過程 D_t^j は潜在ファクター X_t の次式で表される関数である。

$$D_t^j = (d_{j0} + d'_j X_t) \exp(b_{j0} t + b'_j X_t). \quad (2.4)$$

2.2. 証券価格過程と予算制約式

以下では、割引国債の満期までの期間を $\tau = T - t$ と表記する。

補題 1. 仮定 1・2の下、証券価格過程は次を満たしている。

$$\frac{dP_t}{P_t} = r_t dt, \quad (2.5)$$

¹厳密には、物価連動債が中長期安全証券であるが、我が国等の先進諸国では、直近20年間以上、物価安定が継続しているほか、物価連動債は流通量が限定的で、投資対象として組み入れ難いことから、本稿では、国債を近似的に「中長期安全証券」と見做している。

初期条件： $P_0 = 1$.

$$\frac{dP_t^T}{P_t^T} = (r_t + b'(\tau)\Sigma\Lambda_t) dt + b'(\tau)\Sigma dB_t, \quad (2.6)$$

ここで、 $b(\tau)$ は次の非斉次の定数係数線形連立常微分方程式の解である。

$$\frac{db(\tau)}{d\tau} = -(K + \Sigma\Lambda)'b(\tau) - r, \quad (2.7)$$

境界条件： $b(0) = 0$.

$$\frac{dS_t^j}{S_t^j} = (r_t + b'_j\Sigma\Lambda_t) dt + b'_j\Sigma dB_t, \quad (2.8)$$

ここで、

$$b_j = -(K + \Sigma\Lambda)^{j-1}(r - d_j). \quad (2.9)$$

証明. 補論 A.1 参照. □

非債券の代表的指数に対する投資比率を Φ_t^j と表記する. また, 割引国債については, 任意の満期の割引国債を投資対象としているため, 富に対する投資比率密度過程が最適化の対象となる. そこで, 割引国債の富に対する投資比率密度過程を $\varphi_t(\tau)$ と表記する². 以下では, 次の記法を用いる.

$$\Psi_t = \left(\int_0^{\bar{\tau}} \varphi_t(\tau)b(\tau) d\tau + \sum_{j=1}^J \Phi_t^j b_j \right)' \Sigma. \quad (2.10)$$

以下, Ψ_t を「投資過程」乃至は「投資」と略称する.

このとき, 予算制約式が次の補題で示される.

補題 2. 投資過程 Ψ_t と消費率過程 c_t を所与とする. このとき, 仮定 1・2 の下, 富過程 W_t は次の予算制約式を満たす.

$$dW_t = \{W_t(r_t + \Psi_t\Lambda_t) - c_t\} dt + W_t\Psi_t dB_t. \quad (2.11)$$

証明. 補論 A.2 参照. □

2.3. 相似拡大的頑健効用と投資家の消費と証券投資の最適化問題

ナイトの不確実性下, 「頑健効用」(Anderson, Hansen, and Sargent [1]) を持つ投資家は現実の確率測度として P を尤も有り得べき確率測度 (以下, 「参考確率」と呼ぶ) と認識しているが, 参考確率 P 以外の確率測度である可能性を否定出来ない. そこで, 彼女或いは彼は参考確率 P 以外の確率測度の候補として, 全ての「等価確率測度」³ の集合 \mathbb{P} を想定す

²尚, このとき, 或る特定の満期の割引国債の投資比率自体を非零とする投資を認めるため, 許容される関数 φ の空間は超関数を含む関数空間とする.

³ここで, \tilde{P} が P の等価確率測度とは, 両測度の零集合が一致している場合 ($P(A) = 0 \Leftrightarrow \tilde{P}(A) = 0$) を言う. 尚, 任意の等価確率測度 P^ξ は, ギルサノフの定理により, ノビコフの可積分条件を満たす適合的過程 ξ により, ラドン・ニコディム微分として, 次式のように表現される.

$$\frac{dP^\xi}{dP} = \exp\left(\int_0^\infty \xi_t dB_t - \frac{1}{2} \int_0^\infty \xi_t' \xi_t dt\right).$$

る。そして、彼女或いは彼は各消費計画に対し最悪の場合の等価確率測度を想定して、 \mathbb{P} 上で「期待効用汎関数」を最小化する等価確率測度（以下、「最悪確率」と呼ぶ）を求める。この際、参考確率 P を尤も有り得べき確率と認識している以上、参考確率 P と大幅に乖離する最悪確率を想定することは慎重を通り越して杞憂の謗りを免れない。そこで、参考確率 P との乖離に損失を与える、 P に対する P^ξ の相対エントロピーの割引現在価値

$$\mathcal{R}^\xi := E^\xi \left[\int_0^\infty \beta e^{-\beta t} \log E_t \left[\frac{dP^\xi}{dP} \right] dt \right], \quad (2.12)$$

を期待効用汎関数に次のように付加した汎関数を最小化対象とする。

$$U(c) = \inf_{P^\xi \in \mathbb{P}} E^\xi \left[\int_0^\infty e^{-\beta t} v(c_t) dt \right] + \frac{1}{\theta} \mathcal{R}^\xi, \quad (2.13)$$

ここで、 β は割引率、 v は時点効用関数、 θ は「曖昧性の回避度合」を表す正の定数である。

Skiadas [11] による割引相対エントロピー過程 \mathcal{R}_t^ξ の表現⁴ を用いると、頑健効用は次式で表現される。

$$U(c) = \inf_{P^\xi \in \mathbb{P}} E^\xi \left[\int_0^\infty e^{-\beta t} \left\{ v(c_t) + \frac{1}{2\theta} \xi_t' \xi_t \right\} dt \right].$$

頑健効用において曖昧性の回避度合を表す θ は一定で状態に独立である。また、効用汎関数が備えるべき望ましい性質とされる「相似拡大性」を有しておらず、富が増大するにつれて頑健性は低下する。Maenhout [8] は、頑健効用に相似拡大性を付与すべく、 $v(c_t)$ を CRRA 時点効用、 θ を (2.15) 式のように効用過程に依存する形にした「相似拡大的頑健効用」を提唱している。

仮定 3. 投資家は次の相似拡大的頑健効用の最大化を企図する。

$$U(c) = \inf_{P^\xi \in \mathbb{P}} E^\xi \left[\int_0^\infty e^{-\beta t} \left\{ \frac{c_t^{1-\gamma}}{1-\gamma} + \frac{(1-\gamma)U_t^\xi(c)}{2\delta} \xi_t' \xi_t \right\} dt \right], \quad (2.15)$$

ここで、 δ は曖昧性の回避度合を表す正の定数、 U_t^ξ は次式で再帰的に定義される効用過程である。

$$U_t^\xi(c) = E_t^\xi \left[\int_t^\infty e^{-\beta(s-t)} \left\{ \frac{c_s^{1-\gamma}}{1-\gamma} + \frac{(1-\gamma)U_s^\xi(c)}{2\delta} \xi_s' \xi_s \right\} ds \right]. \quad (2.16)$$

予算制約式 (2.11) は、富過程が $u = (c, \Psi)$ で決定されることを示しており、投資家の効用最大化問題における制御変数は $u = (c, \Psi)$ であることが分かる。状態変数を $Z' = (W, X')$ と表記する。また、予算制約式 (2.11) を満たす制御変数 $u = (c, \Psi)$ を初期状態 $Z'_0 = (W_0, X'_0)$ に対する許容的制御と呼び、許容的制御の集合を $\mathcal{B}(Z_0)$ と表記する。このとき、本稿における消費と投資の最適化問題及び値関数 $V(Z_0)$ が次式で定義される。

$$V(Z_0) = \sup_{u \in \mathcal{B}(Z_0)} \inf_{P^\xi \in \mathbb{P}} E^\xi \left[\int_0^\infty e^{-\beta t} \left\{ \frac{c_t^{1-\gamma}}{1-\gamma} + \frac{(1-\gamma)V(Z_t)}{2\delta} \xi_t' \xi_t \right\} dt \right]. \quad (2.17)$$

⁴Skiadas [11] は割引相対エントロピー過程 \mathcal{R}_t^ξ が次式で表現出来ることを示している。

$$\mathcal{R}_t^\xi = \frac{1}{2} E_t^\xi \left[\int_t^\infty e^{-\beta(s-t)} \xi_s' \xi_s ds \right]. \quad (2.14)$$

3. 最悪確率の決定と値関数の偏微分方程式の導出

本章では、頑健性確保のための最悪確率の決定問題を解いた後、同確率を織り込んだ HJB 方程式から推測された値関数を構成する未知関数 $G(X_t)$ の偏微分方程式を導出する。

3.1. 最悪確率の決定

最悪確率候補としての等価確率測度 P^ξ の下での標準ブラウン運動 z^ξ は、

$$B_t^\xi = B_t - \int_0^t \xi_s ds,$$

と表されるので、等価確率測度 P^ξ の下での状態変数に関する確率微分方程式は次のように書き改められる。

$$dZ_t = \left(\begin{pmatrix} W_t(r_t + \Psi_t \Lambda_t) - c_t \\ K(\theta - X_t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} W_t \Psi_t \\ \Sigma \end{pmatrix} \xi_t \right) dt + \begin{pmatrix} W_t \Psi_t \\ \Sigma \end{pmatrix} dB_t^\xi, \quad (3.1)$$

従って、相似拡大的頑健効用における最適化の必要条件である HJB 方程式は次式のように表される。

$$\begin{aligned} \sup_{u \in \mathcal{B}(Z_0)} \inf_{P^\xi \in \mathbb{P}} \left\{ \begin{pmatrix} W_t(r_t + \Psi_t \Lambda_t) - c_t \\ K(\theta - X_t) \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} V_W \\ V_X \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \text{tr} \left[\begin{pmatrix} W_t \Psi_t \\ \Sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_t \Psi_t \\ \Sigma \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} V_{WW} & V_{WX} \\ V_{XW} & V_{XX} \end{pmatrix} \right] \right. \\ \left. - \beta V + \frac{c_t^{1-\gamma}}{1-\gamma} + \frac{(1-\gamma)V}{2\delta} \xi_t' \xi_t + \xi_t' \begin{pmatrix} W_t \Psi_t \\ \Sigma \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} V_W \\ V_X \end{pmatrix} \right\} = 0, \quad (3.2) \\ \text{s.t. } \lim_{T \rightarrow \infty} E[e^{-\beta T} V(Z_T)] = 0. \end{aligned}$$

HJB 方程式 (3.2) における ξ に関する最小化条件より、最悪確率測度 P^{ξ^*} が次のように求められる。

$$\xi_t^* = -\frac{\delta}{(1-\gamma)V} \begin{pmatrix} W_t \Psi_t \\ \Sigma \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} V_W \\ V_X \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

最悪確率測度 P^{ξ^*} を HJB 方程式 (3.2) に代入すると、次式を得る。

$$\begin{aligned} \sup_{u \in \mathcal{B}(X_0)} \left[\begin{pmatrix} W_t(r_t + \Psi_t \Lambda_t) - c_t \\ K(\theta - X_t) \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} V_W \\ V_X \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \text{tr} \left[\begin{pmatrix} W_t \Psi_t \\ \Sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_t \Psi_t \\ \Sigma \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} V_{WW} & V_{WX} \\ V_{XW} & V_{XX} \end{pmatrix} \right] \right. \\ \left. - \beta V + \frac{c_t^{1-\gamma}}{1-\gamma} - \frac{\delta}{2(1-\gamma)V} \begin{pmatrix} V_W \\ V_X \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} W_t \Psi_t \\ \Sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_t \Psi_t \\ \Sigma \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} V_W \\ V_X \end{pmatrix} \right] = 0. \quad (3.4) \end{aligned}$$

3.2. 最悪確率下の効用最大化

HJB 方程式における最大化の 1 階の条件から制御変数の最適解 $u^* = (c^*, \Phi^*)$ は次式を満たしている。

$$c_t^* = V_W^{-\frac{1}{\gamma}}, \quad (3.5)$$

$$\Psi_t^* = \frac{\hat{\Psi}_t}{W_t^2 \left(V_{WW} - \frac{\delta V_W^2}{(1-\gamma)V} \right)}, \quad (3.6)$$

ここで,

$$\hat{\Psi}_t = W_t \left\{ -V_W \Lambda'_t + \left(\frac{\delta V_W}{(1-\gamma)V} V'_X - V_{WX} \right) \Sigma \right\}. \quad (3.7)$$

最適消費 (3.5) 式と最適投資 (3.6) 式を HJB 方程式 (3.4) に代入し,

$$\begin{aligned} W_t V_W \Lambda'_t (\Psi_t^*)' + \frac{1}{2} \text{tr} \left[\begin{pmatrix} W_t \Psi_t^* \\ \Sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_t \Psi_t^* \\ \Sigma \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} V_{WW} & V_{WX} \\ V_{XW} & V_{XX} \end{pmatrix} \right] \\ - \frac{\delta}{2(1-\gamma)V} \begin{pmatrix} V_W \\ V_X \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} W_t \Psi_t^* \\ \Sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_t \Psi_t^* \\ \Sigma \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} V_W \\ V_X \end{pmatrix} \\ = \frac{1}{2} \text{tr} [\Sigma \Sigma' V_{XX}] - \frac{\delta}{2(1-\gamma)V} V'_X \Sigma \Sigma' V_X - \frac{\hat{\Psi}_t \hat{\Psi}_t'}{2W_t^2 \left(V_{WW} - \frac{\delta V_W^2}{(1-\gamma)V} \right)}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

に注意して整理すると, 次の値関数 V に関する偏微分方程式が得られる.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \text{tr} [\Sigma \Sigma' V_{XX}] - \frac{\delta}{2(1-\gamma)V} V'_X \Sigma \Sigma' V_X - \frac{\hat{\Psi}_t \hat{\Psi}_t'}{2W_t^2 \left(V_{WW} - \frac{\delta V_W^2}{(1-\gamma)V} \right)} \\ + W_t r_t V_W + \{K(\theta - X_t)\}' V_X + \frac{\gamma}{1-\gamma} V_W^{-\frac{1-\gamma}{\gamma}} - \beta V = 0. \end{aligned} \quad (3.9)$$

上記偏微分方程式を非斉次項 $V_W^{-\frac{1-\gamma}{\gamma}}$ を捨象して分析すると, 値関数は X_t の未知関数 $G(X_t)$ を用いて次の関数形で近似的に表されると推測される.

$$V(Z_t) = \frac{W_t^{1-\gamma}}{1-\gamma} (G(X_t))^\gamma. \quad (3.10)$$

値関数 V に偏微分を施し, (3.6) 式に代入し, 値関数の偏微分結果とともに偏微分方程式 (3.9) に代入すると, 次の命題を得る.

命題 1. 仮定 1-3 の下, 本問題 (2.17) の最適消費, 最適投資は, それぞれ (3.11) 式, (3.12) 式を満たしており, 値関数 V を構成する未知関数 $G(X_t)$ は 2 階の偏微分方程式 (3.13) の解である.

$$c_t^* = \frac{W_t}{G(X_t)} \quad (3.11)$$

$$\Psi_t^* = \frac{1}{\gamma + \delta} \Lambda'_t + \frac{\gamma(\gamma + \delta - 1)}{(\gamma - 1)(\gamma + \delta)} \frac{G'_X(X_t)}{G(X_t)} \Sigma_X, \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \text{tr} \left[\Sigma \Sigma' \frac{G_{XX}}{G} \right] + \frac{\delta}{2(\gamma - 1)(\gamma + \delta)} \left(\text{tr} \left[\Sigma \Sigma' \frac{G_X}{G} \frac{G'_X}{G} \right] \right) \\ + \left\{ K(\theta - X_t) + \frac{\gamma + \delta - 1}{\gamma + \delta} \Lambda'_t \Sigma \right\} \frac{G_X}{G} + \frac{1}{G} - \left(\frac{\gamma - 1}{2\gamma(\gamma + \delta)} \Lambda'_t \Lambda_t + \frac{\gamma - 1}{\gamma} r_t + \frac{\beta}{\gamma} \right) = 0. \end{aligned} \quad (3.13)$$

証明. 補論 A.3 参照. □

4. 対数線形近似法による近似解析解の導出

本章では、前章で導出された偏微分方程式の非斉次項を Campbell and Viceira [5], 楠田 [7] の方法で対数線形近似し、近似解析解を導出する。

4.1. 偏微分方程式の非斉次項の対数線形近似

偏微分方程式 (3.13) は非斉次項 $1/G$ を含んでおり、解析解の導出を困難にしている。Campbell and Viceira [5] は CRRA 効用とバンチェック金利モデルを仮定し、消費と 2 証券（安全証券と長期物価連動債）投資の最適化問題で導出した金利関数の常微分方程式の近似解析解を導出する際に非斉次項の対数線形近似を用いている。すなわち、(3.11) 式より、 $1/G(X_t)$ が消費・富比率 c_t^*/W_t と等しく、同比率が安定的であることに着目し、 $1/G(X_t)$ を $E[\log(c_t^*/W_t)]$ の周りで対数線形近似している。しかし、この場合、 $E[\log(c_t^*/W_t)]$ は時間変数に依存する。そこで、楠田 [7] は一定値をとる $\lim_{t \rightarrow \infty} E[\log(c_t/W_t)]$ の周りで対数線形近似を行っている。本稿もこれに従って非斉次項を次のように対数線形近似する。

$$\frac{1}{G(X_t)} \approx g_0 - g_1 \log G(X_t), \quad (4.1)$$

ここで、

$$g_0 = g_1(1 - \log g_1), \quad (4.2)$$

$$g_1 = \exp\left(\lim_{t \rightarrow \infty} E\left[\log\left(\frac{c_t^*}{W_t}\right)\right]\right). \quad (4.3)$$

偏微分方程式 (3.13) における非斉次項 $1/G$ を (4.1) 式で近似し、 Λ_t , r_t に、それぞれ (2.2) 式, (2.3) 式を代入すると、次の近似偏微分方程式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \text{tr} \left[\Sigma \Sigma' \frac{G_{XX}}{G} \right] + \frac{\delta}{2(\gamma-1)(\gamma+\delta)} \left(\text{tr} \left[\Sigma \Sigma' \frac{G_X}{G} \frac{G'_X}{G} \right] \right) \\ + \left\{ K(\theta - X_t) - \frac{\gamma+\delta-1}{\gamma+\delta} \Sigma(\lambda + \Lambda X_t) \right\}' \frac{G_X}{G} - g_1 \log G \\ + g_0 - \frac{\gamma-1}{2\gamma(\gamma+\delta)} (\lambda + \Lambda X_t)' (\lambda + \Lambda X_t) - \frac{\gamma-1}{\gamma} (r_0 + r_1' X_t) - \frac{\beta}{\gamma} = 0. \end{aligned} \quad (4.4)$$

近似偏微分方程式 (4.4) の解が次式で表される 2 次関数の指数関数であることは容易に推測される。

$$G(X_t) = \exp \left(a_0 + a' X_t + \frac{1}{2} X_t' A X_t \right). \quad (4.5)$$

このとき、

$$g_1 = \exp \left(- \lim_{t \rightarrow \infty} E[\log G(X_t)] \right) = \exp \left(\lim_{t \rightarrow \infty} \left[-a_0 - a' E[X_t] - \frac{1}{2} E[X_t' A X_t] \right] \right), \quad (4.6)$$

は次の補題で計算される。

補題 3. 仮定 1-3 の下、 g_1 は (a_0, a, A) により次式で表される。

$$g_1 = \exp \left(-a_0 - a' \theta - \frac{1}{2} (\theta' A \theta + \text{tr} [(Q^{-1} \Sigma)' M Q^{-1} \Sigma]) \right), \quad (4.7)$$

ここで、行列 P の第 (i, j) 成分を P_{ij} と表記すると、

$$M_{ij} = \frac{1}{l_i + l_j} (Q' A Q)_{ij}.$$

証明. X_t は線形確率微分方程式 (2.1) の解として、次のように表される.

$$X_t = Q e^{-tL} Q^{-1} X_0 + Q (I - e^{-tL}) Q^{-1} \theta + Q \int_0^t e^{-(t-s)L} Q^{-1} \Sigma dB_s.$$

よって、 $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-tL} = 0$, $E[dB_s] = 0$ に注意すると、 $\lim_{t \rightarrow \infty} E[X_t] = \theta$, が得られる。
次に、

$$X_t' A X_t = \left\{ Q e^{-tL} Q^{-1} X_0 + Q (I - e^{-tL}) Q^{-1} \theta + Q \int_0^t e^{-(t-s)L} Q^{-1} \Sigma dB_s \right\}' \\ A \left\{ Q e^{-tL} Q^{-1} X_0 + Q (I - e^{-tL}) Q^{-1} \theta + Q \int_0^t e^{-(t-s)L} Q^{-1} \Sigma dB_s \right\}.$$

ゆえに、 $E[dB_s dB_t'] = \delta_{st} Ids$ に注意すると、

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} E[X_t' A X_t] &= \theta' A \theta + \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \text{tr} [(Q^{-1} \Sigma)' e^{-(t-s)L} Q' A Q e^{-(t-s)L} Q^{-1} \Sigma] ds \\ &= \theta' A \theta + \text{tr} \left[(Q^{-1} \Sigma)' \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t e^{-(t-s)L} Q' A Q e^{-(t-s)L} ds Q^{-1} \Sigma \right] \\ &= \theta' A \theta + \text{tr} [(Q^{-1} \Sigma)' M Q^{-1} \Sigma]. \end{aligned}$$

以上より、(4.7) 式が導かれる。 □

近似偏微分方程式 (4.4) の解に基づく近似値関数及び近似最適制御をそれぞれ \tilde{V} , $\tilde{u}^* = (\tilde{c}^*, \tilde{\Psi}^*)$ と定義する。

4.2. 近似解析解

関数 (4.5) に偏微分を施し、偏微分方程式 (4.4) に代入し、 g_0 に (4.2) 式を代入すると、次式を得る。

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \text{tr} [\Sigma \Sigma' (aa' + A + aX_t' A' + AX_t a' + AX_t X_t' A')] \\ & + \frac{\delta}{2(\gamma - 1)(\gamma + \delta)} \left(a' + \frac{1}{2} X_t' (A + A') \right) \Sigma \Sigma' \left(a + \frac{1}{2} (A + A') X_t \right) \\ & + \left\{ K\theta - \frac{\gamma + \delta - 1}{\gamma + \delta} \Sigma \lambda - \left(K + \frac{\gamma + \delta - 1}{\gamma + \delta} \Sigma \Lambda \right) X_t \right\}' (a + AX_t) \\ & + g_1 (1 - \log g_1) - g_1 \left(a_0 + a' X_t + \frac{1}{2} X_t' A X_t \right) - \frac{\gamma - 1}{2\gamma(\gamma + \delta)} (\lambda' \lambda + 2\lambda' \Lambda X_t + X_t' \Lambda' \Lambda X_t) \\ & - \frac{\gamma - 1}{\gamma} (r_0 + r_1' X_t) - \frac{\beta}{\gamma} = 0. \quad (4.8) \end{aligned}$$

上式は X_t に関する恒等式なので、次の (a_0, a, A) に関する連立方程式が導出される。

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}A'\Sigma\Sigma'A + \frac{\delta}{8(\gamma-1)(\gamma+\delta)}(A+A')\Sigma\Sigma'(A+A') \\ - \left(K' + \frac{\gamma+\delta-1}{\gamma+\delta}\Lambda'\Sigma' \right) A - \frac{1}{2}g_1A - \frac{\gamma-1}{2\gamma(\gamma+\delta)}\Lambda'\Lambda = 0, \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$A'\Sigma\Sigma'a + A'K\theta - K'a - \frac{\gamma+\delta-1}{\gamma+\delta}(A'\Sigma\lambda + \Lambda'\Sigma'a) - g_1a - \frac{\gamma-1}{\gamma(\gamma+\delta)}\Lambda'\lambda - \frac{\gamma-1}{\gamma}r_1 = 0, \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}a'\Sigma\Sigma'a + \frac{1}{2}\text{tr}[\Sigma\Sigma'A] + \left\{ K\theta - \frac{\gamma+\delta-1}{\gamma+\delta}\Sigma\lambda \right\}' a \\ + g_1(1 - a_0 - \log g_1) - \frac{\gamma-1}{2\gamma(\gamma+\delta)}\lambda'\lambda - \frac{\gamma-1}{\gamma}r_0 - \frac{\beta}{\gamma} = 0, \end{aligned} \quad (4.11)$$

ここで、 g_1 は (4.7) 式で表されている。

但し、上記値関数を構成する未知関数が近似偏微分方程式 (4.4) の解として近似されている場合の値関数、最適消費、最適投資をそれぞれ「近似値関数」、「近似最適消費」、「近似最適投資」と呼び、それぞれ $\tilde{V}, \tilde{c}^*, \tilde{\Psi}^*$ と表記する。このとき、次の命題を得る。

命題 2. 仮定 1-3 の下、本問題 (2.17) の近似値関数、近似最適消費、近似最適投資は次を満たしている。

$$\tilde{V}(Z_t) = \frac{W_t^{1-\gamma}}{1-\gamma} \exp \left[\gamma \left(a_0 + a'X_t + \frac{1}{2}X_t'AX_t \right) \right], \quad (4.12)$$

$$\tilde{c}_t^* = W_t \exp \left[- \left(a_0 + a'X_t + \frac{1}{2}X_t'AX_t \right) \right], \quad (4.13)$$

$$\tilde{\Psi}_t^* = \frac{1}{\gamma+\delta} (\lambda + \Lambda X_t)' + \frac{\gamma(\gamma+\delta)}{(\gamma-1)(\gamma+\delta)} (a + AX_t)' \Sigma, \quad (4.14)$$

ここで、 (a_0, a, A) は連立方程式 (4.9)-(4.11) の解である。

標準ブラウン運動が N 次元で、非債券の代表的指数が J 種類なので、割引国債については、 $I (= N - J)$ 群の投資対象を設定することにより、最適投資を決定出来る。次に、代表的な 2 例を示す。

例 1. 投資家が割引国債の満期までの期間を I 群に区分し、各時点において各区分への投資比率密度を一定とする投資戦略を採用する場合を考察する。説明の便宜上、 $\tau_0 = 0$, $\tau_I = \bar{\tau}$ と表記し、割引国債の満期までの期間を $(\tau_0, \tau_1], (\tau_1, \tau_2], \dots, (\tau_{I-1}, \tau_I]$ に区分する。また、投資比率密度過程を $(\varphi_t^1, \varphi_t^2, \dots, \varphi_t^I)$ とするほか、次のように記法を定める。

$$\Phi_{1t} = \begin{pmatrix} \Phi_{1t}^P \\ \Phi_{1t}^S \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} B_1^P \\ B_1^S \end{pmatrix}, \quad (4.15)$$

ここで、

$$\Phi_{1t}^P = \begin{pmatrix} \varphi_t^1(\tau_1 - \tau_0) \\ \varphi_t^2(\tau_2 - \tau_1) \\ \vdots \\ \varphi_t^I(\tau_I - \tau_{I-1}) \end{pmatrix}, \quad \Phi_{1t}^S = \begin{pmatrix} \Phi_t^1 \\ \Phi_t^2 \\ \vdots \\ \Phi_t^J \end{pmatrix}, \quad B_1^P = \begin{pmatrix} \int_{\tau_0}^{\tau_1} b'(\tau) d\tau \\ \int_{\tau_1}^{\tau_2} b'(\tau) d\tau \\ \vdots \\ \int_{\tau_{I-1}}^{\tau_I} b'(\tau) d\tau \end{pmatrix}, \quad B_1^S = \begin{pmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ \vdots \\ b'_J \end{pmatrix}.$$

このとき, (4.14) 式より, 「危険証券」(非短期安全証券) への近似最適投資比率 $\tilde{\Phi}_{1t}^*$ は次式で表される.

$$\tilde{\Phi}_{1t}^* = \frac{1}{\gamma + \delta} (\Sigma' B_1)^{-1} (\lambda + \Lambda X_t) + \frac{\gamma(\gamma + \delta - 1)}{(\gamma - 1)(\gamma + \delta)} B_1^{-1} (a + AX_t). \quad (4.16)$$

尚, 短期安全証券への近似最適投資比率は $1 - \sum_{i=1}^I \tilde{\varphi}_t^{*i} (\tau_i - \tau_{i-1}) - \sum_{j=1}^J \tilde{\Phi}_t^{*j}$ である.

例 2. 投資家は I 種類の一定満期の割引国債を投資対象とする戦略を採用する場合を考察する. 投資対象国債の満期を $0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_I \leq \bar{\tau}$ とし, 各満期の国債への投資比率を $\Phi_P^1, \Phi_P^2, \dots, \Phi_P^I$ とする. 次のように記法を定める.

$$\Phi_{2t} = \begin{pmatrix} \Phi_{2t}^P \\ \Phi_{2t}^S \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} B_2^P \\ B_2^S \end{pmatrix}, \quad (4.17)$$

ここで,

$$\Phi_{2t}^P = \begin{pmatrix} \Phi_{Pt}^1 \\ \Phi_{Pt}^2 \\ \vdots \\ \Phi_{Pt}^I \end{pmatrix}, \quad \Phi_{2t}^S = \begin{pmatrix} \Phi_t^1 \\ \Phi_t^2 \\ \vdots \\ \Phi_t^J \end{pmatrix}, \quad B_2^P = \begin{pmatrix} b'(\tau_1) \\ b'(\tau_2) \\ \vdots \\ b'(\tau_I) \end{pmatrix}, \quad B_2^S = \begin{pmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ \vdots \\ b'_J \end{pmatrix}. \quad (4.18)$$

このとき, (4.14) 式より, 「危険証券」(非短期安全証券) への近似最適投資比率 $\tilde{\Phi}_{2t}^*$ は次式で表される.

$$\tilde{\Phi}_{2t}^* = \frac{1}{\gamma + \delta} (\Sigma' B_2)^{-1} (\lambda + \Lambda X_t) + \frac{\gamma(\gamma + \delta - 1)}{(\gamma - 1)(\gamma + \delta)} B_2^{-1} (a + AX_t). \quad (4.19)$$

尚, 短期安全証券への近似最適投資比率は $1 - \sum_{i=1}^I \tilde{\Phi}_{Pt}^{*i} - \sum_{j=1}^J \tilde{\Phi}_t^{*j}$ である.

留意点 1. ナイトの不確実性を考慮していないバトボルド他 [2] の問題における危険証券への近似最適投資比率は, 本稿問題における $\delta = 0$ の場合であり, 上記例 2 では次式となる.

$$\tilde{\Phi}_{2t}^*|_{\delta=0} = \frac{1}{\gamma} (\Sigma' B_2)^{-1} (\lambda + \Lambda X_t) + B_2^{-1} (a + AX_t). \quad (4.20)$$

上式では, 第 1 項の近視眼的動機に基づく需要項は明示的に相対的危険回避度に反比例し, 第 2 項の保険的動機に基づく需要項には相対的危険回避度は明示的には現れていない (但し, (a, A) に陰伏的に含まれていることに留意せよ). 翻って, 本稿における危険証券への近似最適投資比率 (4.19) 式では, 近視眼的動機に基づく需要項は相対的危険回避度と「相対的曖昧性回避度」の和に反比例し, 保険的動機に基づく需要項にも明示的に両回避度が現れている.

5. 今後の課題

近似値関数を構成する係数体系 (a_0, a, A) に関する連立方程式 (4.9)-(4.11) は一般に解が複数存在するので, これら複数の解は本問題の最適解の候補に過ぎない. 例えば, Campbell and Viceira [5] が推測した解は, 連立方程式 (4.9)-(4.11) において $A = 0$ とした場合に導出される解に対応する. すなわち, 本稿で示された高次の一般解における低次の候補解に過ぎないのである. これら複数の候補解から最適解を識別する必要がある. 実用的には, 想定さ

れる状態変数空間の領域内の幾つかの状態変数 Z_0 に対し、値関数 $\tilde{V}(Z_0)$ の数値の大小関係を比較すれば識別出来るのかもしれない。しかし、本稿では値関数が近似関数に過ぎず、算出される値関数の数値には近似誤差も含まれるため、大小関係が微差といった場合は最適解を識別出来たのか、不安を払拭し難い。

こうした観点から、バトボルド他 [2] では、Maslowski and Veverka [10] の理論を援用して、上記複数候補解から最適解を識別するための十分条件を与えた。Maslowski and Veverka [10] では、通常の方法を対象としており、本稿のような最小・最大化問題に適用することは出来ない。本稿の問題に対しても、最適解の十分条件を提示することは今後の課題である。

参考文献

- [1] E. Anderson, L. Hansen, and T. Sargent: A quartet of semi-groups for model specification, robustness, prices of risk, and model detection. *Journal of the European Economic Association*, **1** (2003), 68-123.
- [2] バトボルドボロルソフタ, 菊池健太郎, 楠田浩二: 消費と長期証券投資の最適化問題に対する近似解析解. Discussion paper J-60, 滋賀大学経済学部附属リスク研究センター (2018).
- [3] J. Campbell: Intertemporal asset pricing without consumption data. *American Economic Review*, **83** (1993), 487-512.
- [4] J. Campbell, P. Maenhout, and L. Viceira: Stock market mean reversion and the optimal equity allocation of a long-lived investor. *European Economic Review*, **5**, (2001), 269-292.
- [5] J. Campbell, and L. Viceira: *Strategic Asset Allocation* (Oxford University Press, Oxford, New York, 2002).
- [6] D. Duffie, and R. Kan: A yield-factor model of interest rates. *Mathematical Finance*, **6** (1996), 379-406.
- [7] 楠田浩二: 消費と債券投資の多期間最適化問題における高次の近似解析解. Discussion paper J-35, 滋賀大学経済学部附属リスク研究センター (2013).
- [8] P. Maenhout: Robust portfolio rules and asset pricing. *The Review of Financial Studies*, **17** (2004), 951-984.
- [9] H. Mamaysky: A model for pricing stocks and bonds. Working paper 02-10, International Center for Finance, Yale School of Management (2002).
- [10] B. Maslowski, and P. Veverka: Sufficient stochastic maximum principle for discounted control problem. *Applied Mathematics and Optimization*, **70** (2014), 225-252.
- [11] C. Skiadas: Robust control and recursive utility. *Finance and Stochastics*, **7** (2003), 475-489.

A. 証明

A.1. 補題 1 の証明

標準ブラウン運動 B とリスクの市場価格 Λ により,

$$\tilde{B}_t = B_t + \int_0^t \Lambda_s ds, \quad (\text{A.1})$$

で定義される確率過程 \tilde{B}_t は、Girsanov の定理より、リスク中立確率測度下の標準ブラウン運動である。よって、リスク中立確率測度の下で、潜在ファクターの確率微分方程式は、

$$\begin{aligned} dX_t &= (K(\theta - X_t) - \Sigma\Lambda_t) dt + \Sigma d\tilde{B}_t \\ &= \{K\theta - \Sigma\lambda - (K + \Sigma\Lambda)X_t\} dt + \Sigma d\tilde{B}_t, \end{aligned}$$

と表現される。

今、割引国債 P^T を r_t の上に書かれた派生資産と看做すと、 r_t は X_t のアフィン関数なので、滑らかな関数 $f(X_t, t)$ により、

$$P_t^T = f(X_t, t), \quad (\text{A.2})$$

と表される。このとき、無裁定条件から、 f は次の偏微分方程式の解となっていることが示される。

$$f_t + \{K\theta - \Sigma\lambda - (K + \Sigma\Lambda)X_t\}' f_x + \frac{1}{2} \text{tr}[\Sigma\Sigma' f_{xx}] - (r_0 + r'X_t)f = 0, \quad (\text{A.3})$$

終端条件： $f(X_T, T) = 1$ 。

一方、本モデルはアフィン・モデルなので、 $\tau = T - t$ とおくと、上記偏微分方程式の解 f は滑らかな関数 $b_0(\tau), b(\tau)$ によって

$$f(X_t, t) = e^{b_0(\tau) + b(\tau)'X_t}, \quad (\text{A.4})$$

境界条件： $b_0(0) = 0, b(0) = 0$,

と書けることが示される。(A.4) 式に偏微分を施し、(A.3) 式に代入すると、次式を得る。

$$-\frac{db_0(\tau)}{d\tau} - \frac{db(\tau)'}{d\tau} X_t + b(\tau)' \{K\theta - \Sigma\lambda - (K + \Sigma\Lambda)X_t\} + \frac{1}{2} b'(\tau) \Sigma \Sigma' b(\tau) - (r_0 + r'X_t) = 0. \quad (\text{A.5})$$

(A.5) 式は X_t の恒等式であるから、 X_t の係数を整理すると、(A.5) 式を得る。最後に、(A.4) 式を対数微分して P_t^T の確率微分方程式を導出すると、(2.6) 式を得る。

非債券の代表的指数を \tilde{S}_t^j と表記する。このとき、Mamaysky [9] より、 \tilde{S}_t^j は次式で表され、

$$\tilde{S}_t^j = \exp(b_{j0}t + b_j'X_t). \quad (\text{A.6})$$

配当率過程は次式となる。

$$\frac{D_t^j}{\tilde{S}_t^j} = (d_{j0} + d_j'X_t). \quad (\text{A.7})$$

(A.6)(A.7) 両式より、配当込み指数に関する無裁定条件から、次式を得る。

$$b_{j0} + b_j' \{K\theta - \Sigma\lambda - (K + \Sigma\Lambda)X_t\} + \frac{1}{2} b_j' \Sigma \Sigma' b_j + (d_{j0} + d_j'X_t) - (r_0 + r'X_t) = 0. \quad (\text{A.8})$$

(A.8) 式は X_t の恒等式であるから、 X_t の係数を整理すると、(2.9) 式を得る。

A.2. 補題 2 の証明

満期までの期間 τ の割引国債価格を $P_t(\tau)$ と表記する。短期安全証券、割引国債、代表的指数から組成されるポートフォリオを $(\vartheta, (\vartheta(\tau)), (\vartheta^i))$ とすると、次式が成り立つ。

$$W_t = \vartheta_t P_t + \int_0^{\bar{\tau}} \vartheta_t(\tau) P_t(\tau) d\tau + \sum_{j=1}^J \vartheta_t^j S_t^j.$$

このとき、所与の c の下、自己資金充足的ポートフォリオ $(\vartheta, (\vartheta(\tau)), (\vartheta^i))$ は、次式を満たしている。

$$\begin{aligned} dW_t &= \vartheta_t dP_t + \int_0^{\bar{\tau}} \vartheta_t(\tau) dP_t(\tau) d\tau + \sum_{j=1}^J \vartheta_t^j dS_t^j - c_t dt \\ &= W_t \left\{ \left(1 - \int_0^{\bar{\tau}} \varphi_t(\tau) d\tau - \sum_{j=1}^J \Phi_t^j \right) \frac{dP_t}{P_t} + \int_0^{\bar{\tau}} \varphi_t(\tau) \frac{dP_t(\tau)}{P_t(\tau)} d\tau + \sum_{j=1}^J \Phi_t^j \frac{dS_t^j}{S_t^j} \right\} - c_t dt. \end{aligned}$$

上式に、(2.5)(2.6)(2.8) 式を代入し、整理すると、(2.11) 式を得る。

A.3. 命題 1 の証明

先ず、最適消費は、

$$c_t^* = V_W^{-\frac{1}{\gamma}} = \left\{ \left(\frac{G}{W_t} \right)^\gamma \right\}^{-\frac{1}{\gamma}} = \frac{W_t}{G},$$

すなわち、(3.11) 式が得られる。

次に、値関数に偏微分を施すと、次の式群を得る。

$$\begin{aligned} W_t V_W &= (1 - \gamma)V, & V_X &= \gamma V \frac{G_X}{G}, & W_t^2 V_{WW} &= -\gamma(1 - \gamma)V, \\ W_t V_{XW} &= \gamma(1 - \gamma)V \frac{G_X}{G}, & V_{XX} &= \gamma V \left\{ (\gamma - 1) \frac{G_X}{G} \frac{G'_X}{G} + \frac{G_{XX}}{G} \right\}. \end{aligned}$$

値関数の偏微分結果より、最適投資 (3.6) 式右辺の分子・分母は次のように表される。

$$\hat{\psi}_t = V \left((\gamma - 1)\Lambda'_t + \gamma(\gamma + \delta - 1) \frac{G'_X}{G} \Sigma \right), \quad (\text{A.9})$$

$$W_t^2 \left(V_{WW} - \frac{\delta V_W^2}{(1 - \gamma)V} \right) = (\gamma - 1)(\gamma + \delta)V. \quad (\text{A.10})$$

ゆえに、最適投資 (3.6) 式に (A.9)(A.10) 式を代入すると、(3.6) 式を得る。

値関数 V の偏微分方程式 (3.9) における第 1 項～第 3 項は、(A.9)(A.10) 式を代入し整理

すると、次式が得られる.

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \text{tr} [\Sigma \Sigma' V_{XX}] - \frac{\delta}{2(1-\gamma)V} V_X' \Sigma \Sigma' V_X - \frac{\hat{\Psi}_t \hat{\Psi}_t'}{2W_t^2 \left(V_{WW} - \frac{\delta V_W^2}{(1-\gamma)V} \right)} \\
&= \frac{\gamma}{2} V \text{tr} \left[\Sigma \Sigma' \left\{ (\gamma-1) \frac{G_X}{G} \frac{G_X'}{G} + \frac{G_{XX}}{G} \right\} \right] + \frac{\gamma^2 \delta}{2(\gamma-1)} \frac{G_X'}{G} \Sigma \Sigma' \frac{G_X}{G} \\
&- \frac{1}{2(\gamma-1)(\gamma+\delta)} V \left((\gamma-1) \Lambda_t' + \gamma(\gamma+\delta-1) \frac{G_X'}{G} \Sigma \right) \left((\gamma-1) \Lambda_t + \gamma(\gamma+\delta-1) \frac{G_X}{G} \Sigma \right)' \\
&= V \left\{ \frac{\gamma}{2} \text{tr} \left[\Sigma \Sigma' \frac{G_{XX}}{G} \right] - \frac{\gamma-1}{2(\gamma+\delta)} \Lambda_t' \Lambda_t - \frac{\gamma(\gamma+\delta-1)}{\gamma+\delta} \Lambda_t' \Sigma' \frac{G_X}{G} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\gamma}{2} \left(\gamma-1 + \frac{\gamma\delta}{\gamma-1} - \frac{\gamma(\gamma+\delta-1)^2}{(\gamma-1)(\gamma+\delta)} \right) \frac{G_X'}{G} \Sigma \Sigma' \frac{G_X}{G} \right\} \\
&= \gamma V \left\{ \frac{1}{2} \text{tr} \left[\Sigma \Sigma' \frac{G_{XX}}{G} \right] - \frac{\gamma-1}{2\gamma(\gamma+\delta)} \Lambda_t' \Lambda_t - \frac{\gamma+\delta-1}{\gamma+\delta} \Lambda_t' \Sigma' \frac{G_X}{G} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\delta}{2(\gamma-1)(\gamma+\delta)} \frac{G_X'}{G} \Sigma \Sigma' \frac{G_X}{G} \right\}. \quad (\text{A.11})
\end{aligned}$$

値関数の偏微分方程式 (3.9) における第6項は, (3.5) 式を代入し整理すると,

$$\frac{\gamma}{1-\gamma} V_W^{1-\frac{1}{\gamma}} = \gamma \frac{V}{W} \left\{ \left(\frac{G}{W} \right)^\gamma \right\}^{-\frac{1}{\gamma}} = \gamma \frac{V}{G}, \quad (\text{A.12})$$

を得る.

(A.11)(A.12) 式等を値関数の偏微分方程式 (3.9) に代入し, 両辺を γV で除して整理すると, (3.13) 式が得られる.