CRR DISCUSSION PAPER SERIES J

Discussion Paper No. J-68

相似拡大的頑健効用消費者の長期国際証券投資の最適化問題に対する近似解析解

バトボルド ボロルソフタ・菊池健太郎・楠田浩二

2018 年 9 月

Center for Risk Research
Faculty of Economics
SHIGA UNIVERSITY

1-1-1 BANBA, HIKONE,
SHIGA 522-8522, JAPAN

滋賀大学経済学部附属リスク研究センター
〒522-8522 滋賀県彦根市馬場 1-1-1

相似拡大的頑健効用消費者の長期国際証券投資の最適化問題に対する近似解析解

バトボルド ボロルソフタ　　菊池 健太郎　　楠田 浩二 *
滋賀大学大学院博士後期課程　　滋賀大学　　滋賀大学

和文概要　世界金融危機以降，想定する確率過程自体を特定出来ない「ナイトの不確実性」を考慮した投資の頑健最適化に対する認識が高まっている．バトボルド・菊池・楠田 [3] は，一般性の高いアフィン潜在ファクター証券市場モデルの下,「相似拡大的頑健効用」（Maenhout [11]）を有する消費者が全満期の国債，非債券主要指数に投資する頑健最適化問題に対し，Hamilton-Jacobi-Bellman 方程式に現れる非斉次項に対数線形近似法（Campbell and Viceira [6]，楠田 [9]）を適用し，近似解析解を導出している．本稿では，アフィン潜在ファクター国際証券市場モデル（菊池 [8]）において非定常ファクターを捨象した国際証券市場モデルを仮定し，相似拡大的頑健効用を有する消費者が国内外の全満期の国債，非債券主要指数に投資する国際証券投資問題に対し，近似解析解を導出した．同近似解析解から導出された近似最適投資比率は，為替レート固有の状態過程の変化の影響を，第 1 項の近視眼的需要では為替レート固有のリスクの市場価格の変化を通じて間接的に，第 2 項の保険需要項では直接的に受けているほか，最適投資比率の同変化に対する感応度にリスクの市場価格の内外価格差が影響を及ぼしていることが判明した．

キーワード: 頑健制御，近似解析解，国際投資，債券投資，ナイトの不確実性

1.　序論

平成バブル崩壊以降の長期停滞の一因としてイノベーション創出のためのリスク・マネーの供給不足が指摘されてきたほか，社会保障制度の持続困難に伴い各家計が退職後に備えるための資産形成を行う必要性が高まってきたことから，国家経済戦略として「貯蓄から投資へ」が提唱されて久しいが，家計の投資比率は低迷を続けている．一因として，政府が家計の資産運用において模範的アセット・アロケーションを提示出来ていないことが挙げられる．また，GPIF が 2014 年秋，公的年金運用における株式投資比率を引き上げる方針を決定したが，本来，公的年金運用における株式投資比率は，我が国の平均的家計の最適アセット・アロケーションを踏まえて設定されるべきものである．こうした観点から，家計の模範的アセット・アロケーションの探求は，現代日本経済の喫緊の課題と思料する．

さて，証券投資においては，分散投資の重要性が強調されてきたが，分散投資に加えて長期投資が重要である．Campbell and Viceira [6] は，長期投資においては安全証券は短期債ではなく長期物価連動債であることを指摘し，投資対象に長期物価連動債を含めるべきことを強調している．こうした観点から，Campbell and Viceira [6] は金利変動下の消費と株式・債券投資の最適化問題を研究しているが，同問題では，一般に，Hamilton-Jacobi-Bellman 方程式（以下,「HJB 方程式」）から導出される偏微分方程式に金利変動リスクに起因する非斉次項が現れ，解析解の導出を困難にする．

他方，世界金融危機以降，想定する確率過程自体を特定出来ない「ナイトの不確実性」を考慮した投資の頑健最適化の必要性に対する認識が高まっている．ナイトの不確実性下の消

*連絡先 kusuda@biwako.shiga-u.ac.jp

費と投資の頑健最適化では,「最悪確率」下でも効用水準を相当程度の水準に維持出来るように消費と投資を決定しなければならないため，通常の消費と投資の最適化の前段階として，「最悪確率」の決定が必要となり，通常の消費と投資の決定問題よりも複雑な問題を解くことを余儀なくされる．

バトボルド･菊池･楠田 [3] は，ナイトの不確実性下，相似拡大的頑健効用（Maenhout [11]）を有する消費者が一般性の高いアフィン潜在ファクター証券市場モデルの下，短期債，全満期の国債，非債券主要指数に投資する無限時間最適化問題を考察している．彼等は相似拡大的頑健効用最適化問題の結果導出される最小･最大化問題の HJB 方程式から間接効用関数の偏微分方程式を導出した後，同偏微分方程式の非斉次項に対し，Campbell and Viceira [6]，楠田 [9] の対数線形近似法を適用して，近似解析解を導いている．

しかし，我が国では，平成バブル崩壊以降，低成長が続いているので，証券投資の期待収益率を高めるためには，海外証券投資を含む国際証券投資が不可避となっている．

本稿では，相似拡大的頑健効用を有する消費者が国内短期債のほか，国内外の全満期の国債，非債券主要指数に投資する無限期間最適化問題を考察する．本稿の主要な結果は次の通りである．

先ず，国際証券市場モデルとして，Mamaysky [12] のアフィン潜在ファクター株式市場モデルと Leippold and Wu [10] の国際証券市場モデルを結合した，一般性の高いアフィン潜在ファクター国際証券市場モデル（菊池 [8]）から株式価格過程を表現するための非定常項を捨象したアフィン潜在ファクター国際証券市場モデルを仮定した．次に，相似拡大的頑健効用最適化問題の結果導かれる間接効用関数の偏微分方程式の非斉次項に対し，Campbell and Viceira [6]，楠田 [9] の対数線形近似法を適用して，近似解析解を導いた．

導出された近似最適投資比率を国内証券投資の近似最適投資比率と比較すると，前者は，為替レート固有の状態過程の変化の影響を，第 1 項の近視眼的需要では為替レート固有のリスクの市場価格の変化を通じて間接的に，第 2 項の保険需要項では直接的に受けているほか，最適投資比率の同変化に対する感応度にリスクの市場価格の内外価格差が影響を及ぼしていることが判明した．

本稿の構成は次の通りである．2 章では，アフィン潜在ファクター国際証券市場モデル，相似拡大的頑健効用，同効用を持つ投資家の最適化問題を説明する．3 章で，最悪確率を決定し，同確率を織り込んだ HJB 方程式から価値関数の非斉次偏微分方程式を導出する．4 章で，同偏微分方程式の非斉次項の対数線形近似により近似解析解を導出し，近似最適投資比率を示す．5 章で，今後の課題を述べる．

2.　アフィン潜在ファクター国際証券市場モデルと消費者の最適化問題

本章では，先ず，菊池 [8] のアフィン潜在ファクター国際証券市場モデルを紹介し，証券価格過程の従う確率微分方程式を示す．次に，相似拡大的頑健効用を持つ消費者の消費と投資の最適化問題を示す.

2.1.　市場環境

無限連続時間の摩擦の無い証券市場経済を考察する．ナイトの不確実性下，投資家共通の最も有り得べき確率測度と情報構造は完備フィルター付き確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathrm{P})$ によりモデル化されている．ここで，$\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,\infty)}$ は $\bar{N}$ 次元標準ブラウン運動 B によって生成される自然なフィルター付けである．確率測度 P の下での期待値作用素を E，条件付き期待値作用素を E_t と表記する．

国内市場では，1 種類の消費財，安全証券 (以下,「短期安全証券」と呼ぶ),「中長期安全証券」[1] としての信用リスクの無い割引債（以下,「割引国債」と呼ぶ）で，満期までの期間が最長 $\bar{\tau}$，額面 1 円の任意満期の割引国債，J 種類，種類の非債券の主要指数（株式指数，REIT 指数等）が任意の時点で市場で取引されている．海外市場は，通貨の相異なる N 国の第 n 国（ここで，$n \in \{1, \cdots, N\}$，以下同様）において，満期までの期間が最長 $\hat{\tau}_n$，額面 1 第 n 国通貨単位の任意満期の割引国債，$\hat{J}_n$ 種類の非債券の主要指数が任意の時点で市場で取引されている．また，各国間で為替取引が任意の時点で行われている．

国内における短期安全証券の価格を P 円，満期 T の割引国債の価格を P^T 円，非債券第 j 指数の配当込みの価格を S^j 円と表記し，海外の第 n 国における満期 T の割引国債の価格を $\hat{P}_n^T$ 第 n 国通貨単位，非債券第 j 指数の価格を $\hat{S}_n^j$ 第 n 国通貨単位と表記する．国内消費財空間は，消費過程 c が $\int_0^\infty c_t dt < \infty \ a.s.$ を満たす非負値可測過程の空間とする．

菊池 [8] は，Mamaysky [12] のアフィン潜在ファクター株式市場モデルと Leippold and Wu [10] の国際証券市場モデルを結合した，一般性の高いアフィン潜在ファクター国際証券市場モデルを提案している．しかし，同モデルでは，株式価格過程をモデル化するための潜在ファクターが非定常であり，本稿における潜在ファクターの定常性に基づく近似解析を適用不可にする．そこで，本稿では，菊池 [8] のアフィン潜在ファクター国際証券市場モデルにおける非定常項を捨象したモデルを仮定する．

仮定 1. $\bar{N}$ 次元潜在ファクターは M 次元ファクター X と N 次元ファクター Y から成り，各ファクターは次の確率過程に従う．

$$\begin{aligned} dX_t &= K_X(\theta_X - X_t)\,dt + \Sigma_X\,dB_t^X, & (2.1)\\ dY_t &= K_Y(\theta_Y - Y_t)\,dt + \Sigma_Y\,dB_t^Y, & (2.2)\end{aligned}$$

ここで，θ_X は M 次元定数ベクトル，θ_Y は N 次元定数ベクトル，K_X, Σ_X は $M \times M$ 定数行列，K_Y, Σ_Y は $N \times N$ 定数行列である．また，(K_X, K_Y) は次のように対角化可能な正定値対称行列である．

$$L_X = Q_X^{-1} K_X Q_X = \begin{pmatrix} l_1^X & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & l_2^X & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & l_M^X \end{pmatrix}, \qquad L_Y = Q_Y^{-1} K_Y Q_Y = \begin{pmatrix} l_1^Y & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & l_2^Y & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & l_N^Y \end{pmatrix},$$

ここで，$l_1^X, l_2^X, \cdots, l_M^X, l_1^Y, l_2^Y, \cdots, l_N^Y > 0$ であることに留意．

仮定 2. *1.* 国内（海外第 n 国）の状態価格密度過程 π_t（同 $\hat{\pi}_t^n$）は，国内（海外第 n 国）の金利期間構造の状態価格密度過程 ρ_t（同 $\hat{\rho}_t^n$）と指数マルチンゲール ν_t（同 $\hat{\nu}_t^n$）の積で表される．

$$\pi_t = \rho_t\,\nu_t, \qquad \hat{\pi}_t^n = \hat{\rho}_t^n\,\hat{\nu}_t^n, \tag{2.3}$$

ここで，指数マルチンゲール ν_t（同 $\hat{\nu}_t^n$）のボラティリティは，潜在ファクター Y_t（同 Y_t）のアフィン関数である．

$$\frac{d\nu_t}{\nu_t} = -\Lambda_t^Y\,dB_t^Y, \qquad \frac{d\hat{\nu}_t^n}{\hat{\nu}_t^n} = -\hat{\Lambda}_{nt}^Y\,dB_t^Y, \tag{2.4}$$

[1]厳密には，物価連動債が中長期安全証券であるが，我が国では，直近 20 年間以上，物価安定が継続しているほか，物価連動債は流通量が限定的で，投資対象として組み入れ難いことから，本稿では，国債を近似的に「中長期安全証券」と見做している．

ここで，

$$\Lambda_t^Y = \lambda_Y + \Lambda_Y Y_t, \qquad \hat{\Lambda}_{nt}^Y = \hat{\lambda}_Y^n + \Lambda_Y Y_t, \tag{2.5}$$

2. 国内（海外）のリスクの市場価格 Λ_t^X（同 $\hat{\Lambda}_{nt}^X$）は，潜在ファクター X_t（同 X_t）のアフィン関数である．

$$\Lambda_t^X = \lambda_X + \Lambda_X X_t, \qquad \hat{\Lambda}_{nt}^X = \hat{\lambda}_X^n + \Lambda_X X_t, \tag{2.6}$$

ここで，$K_X + \Sigma_X \Lambda_X$ は正則である．

3. 国内（海外第 n 国）の瞬間的スポット・レート r_t（同 $\hat{r}_{nt}$）は潜在ファクター X_t（同 X_t）のアフィン関数である．

$$r_t = r_0 + r' X_t, \qquad \hat{r}_{nt} = \hat{r}_{n0} + \hat{r}_n' X_t. \tag{2.7}$$

4. 国内（海外第 n 国）の配当率過程 D_t（同 $\hat{D}_{nt}$）は潜在ファクター X_t（同 X_t）の次式で表される関数である．

$$D_t^j = (c_j + d_j' X_t)\exp(a_j t + b_j' X_t), \qquad \hat{D}_{nt}^j = (\hat{c}_{nj} + \hat{d}_{nj}' X_t)\exp(\hat{a}_{nj} t + \hat{b}_{nj}' X_t). \tag{2.8}$$

2.2. 証券価格過程と予算制約式

以下では，割引国債の満期までの期間を $\tau = T - t$ と表記する．

補題 1. 仮定 *1*・*2* の下，次が成立する．

1. 国内証券の無裁定価格過程は次を満たしている．

$$\frac{dP_t}{P_t} = r_t\,dt, \qquad P_0 = 1, \tag{2.9}$$

$$\frac{dP_t^T}{P_t^T} = \left(r_t + b'(\tau)\Sigma_X \Lambda_t^X\right)\,dt + b'(\tau)\Sigma_X\,dB_t^X, \qquad P_T^T = 1, \tag{2.10}$$

ここで，$b(\tau)$ は次の常微分方程式の解である．

$$\frac{db(\tau)}{d\tau} = -(K_X + \Sigma_X \Lambda_X)' b(\tau) - r, \qquad b(0) = 0. \tag{2.11}$$

$$\frac{dS_t^j}{S_t^j} = \left(r_t + b_j' \Sigma_X \Lambda_t^X\right)\,dt + b_j' \Sigma\,dB_t^X, \tag{2.12}$$

ここで，b_j は次式で与えられている．

$$b_j = (K_X + \Sigma_X \Lambda_X)'^{-1}(d_j - r). \tag{2.13}$$

2. 海外第 n 国との無裁定為替レート過程 ε_{nt} は次を満たしている．

$$\frac{d\varepsilon_{nt}}{\varepsilon_{nt}} = \{r_t - \hat{r}_{nt} + (\lambda_X - \hat{\lambda}_X^n)'\Lambda_t^X + (\lambda_Y - \hat{\lambda}_Y^n)'\Lambda_t^Y\}dt + (\lambda_X - \hat{\lambda}_X)' dB_t^X + (\lambda_Y - \hat{\lambda}_Y^n)' dB_t^Y. \tag{2.14}$$

3. 海外第 n 国証券の円建て無裁定価格過程は次を満たしている．

$$\frac{d(\hat{P}^T_{nt}\varepsilon_t)}{\hat{P}^T_{nt}\varepsilon_{nt}} = \left\{r_t + \left(\hat{b}'_n(\tau)\Sigma_X + (\lambda_X - \hat{\lambda}^n_X)'\right)\Lambda^X_t + (\lambda_Y - \hat{\lambda}^n_Y)'\Lambda^Y_t\right\} dt + \left(\hat{b}'_n(\tau)\Sigma_X + (\lambda_X - \hat{\lambda}^n_X)'\right) dB^X_t + (\lambda_Y - \hat{\lambda}^n_Y)' \, dB^Y_t, \quad (2.15)$$

ここで，$\hat{b}_n(\tau)$ は次の常微分方程式の解である．

$$\frac{d\hat{b}_n(\tau)}{d\tau} = -(K_X + \Sigma_X\Lambda_X)\hat{b}_n(\tau) - \hat{r}_n, \qquad b(0) = 0. \quad (2.16)$$

$$\frac{d(\hat{S}^j_{nt}\varepsilon_{nt})}{\hat{S}^j_{nt}\varepsilon_{nt}} = \left\{r_t + \left(\hat{b}'_{nj}\Sigma_X + (\lambda_X - \hat{\lambda}_X)'\right)\Lambda^X_t + (\lambda_Y - \hat{\lambda}^n_Y)'\Lambda^Y_t\right\} dt + \left(\hat{b}'_{nj}\Sigma_X + (\lambda_X - \hat{\lambda}^n_X)'\right) dB^X_t + (\lambda_Y - \hat{\lambda}^n_Y)' \, dB^Y_t, \quad (2.17)$$

ここで，$\hat{b}_{nj}$ は次式で与えられている．

$$\hat{b}_{nj} = (K_X + \Sigma_X\Lambda_X)'^{-1}(\hat{d}_{nj} - \hat{r}_n). \quad (2.18)$$

証明．補論 A.1 参照． □

国内（海外第 n 国）の第非債券 j 指数に対する投資比率を Φ^j_t（同 $\hat{\Phi}^j_{nt}$）と表記する．また，海外第 n 国の投資対象主要指数を $\hat{J}_n$ 種類とする．

割引国債については，任意の満期の割引国債を投資対象としているため，富に対する投資比率密度過程が最適化の対象となる．そこで，国内（海外第 n 国）の割引国債の富に対する投資比率密度過程を $\varphi_t(\tau)$（同 $\hat{\varphi}_{nt}(\tau)$）と表記する [2]．以下では，次の記法を用いる．

$$\Psi^P_t = \int_0^{\bar{\tau}} \varphi_t(\tau) b'(\tau) \, d\tau \, \Sigma_X, \qquad \Psi^S_t = \sum_{j=1}^{J} \Phi^j_t b'_j \Sigma_X,$$

$$\hat{\Psi}^P_{Xt} = \sum_{n=1}^{N} \int_0^{\hat{\tau}_n} \hat{\varphi}_{nt}(\tau) \left(\hat{b}'_n(\tau)\Sigma_X + \left(\lambda_X - \hat{\lambda}^n_X\right)'\right) d\tau,$$

$$\hat{\Psi}^S_{Xt} = \sum_{n=1}^{N} \sum_{j=1}^{\hat{J}_n} \hat{\Phi}^j_{nt} \left(\hat{b}'_{nj}\Sigma_X + \left(\lambda_X - \hat{\lambda}^n_X\right)'\right),$$

$$\hat{\Psi}^P_{Yt} = \sum_{n=1}^{N} \int_0^{\bar{\tau}_n} \hat{\varphi}_{nt}(\tau) \, d\tau \left(\lambda_Y - \hat{\lambda}^n_Y\right)', \qquad \hat{\Psi}^S_{Yt} = \sum_{n=1}^{N} \sum_{j=1}^{\hat{J}_n} \hat{\Phi}^j_{nt} \left(\lambda_Y - \hat{\lambda}^n_Y\right)',$$

$$\Psi^X_t = \Psi^P_t + \Psi^S_t + \hat{\Psi}^P_{Xt} + \hat{\Psi}^S_{Xt}, \qquad \Psi^Y_t = \hat{\Psi}^P_{Yt} + \hat{\Psi}^S_{Yt}.$$

また，Ψ_t を次式で定義し,「投資過程」乃至は「投資」と略称する．

$$\Psi_t = \begin{pmatrix} \Psi^X_t & \Psi^Y_t \end{pmatrix}. \quad (2.19)$$

このとき，消費者の予算制約式が次の補題で示される．

[2]尚，このとき，或る特定の満期の割引国債の投資比率自体を非零とする投資を認めるため，許容される国内（海外第 n 国）の割引国債投資比率密度関数 φ（同 $\hat{\varphi}_n$）の空間は超関数を含む関数空間とする．

補題 2. 投資過程 Ψ_t と消費過程 c_t を所与とする．このとき，仮定 *1・2* の下，富過程 W_t は次の予算制約式を満たす．

$$dW_t = \{W_t\,(r_t + \Psi_t \Lambda_t) - c_t\}\,dt + W_t \Psi_t\,dB_t, \tag{2.20}$$

ここで，

$$\Lambda_t = \begin{pmatrix} \Lambda_t^X \\ \Lambda_t^Y \end{pmatrix}, \qquad B_t = \begin{pmatrix} B_t^X \\ B_t^Y \end{pmatrix}.$$

証明．補論 A.2 参照． □

予算制約式 (2.20) は，富過程が $u_t = (c_t, \Psi_t)$ で決定されることを示しており，消費者の効用最大化問題における制御過程は $u_t = (c_t, \Psi_t)$ であることが分かる．

2.3.　相似拡大的頑健効用と消費者の最適化問題

ナイトの不確実性下，相似拡大的頑健効用 [3]（Maenhout [11]）を有する消費者は現実の確率測度として P を尤も有り得べき確率測度（以下,「参考確率」と呼ぶ）と認識しているが，参考確率 P 以外の確率測度である可能性を否定出来ない．そこで，彼女或いは彼は参考確率 P 以外の確率測度の候補として，全ての「等価確率測度」[4] の集合 $\mathbb{P}$ を想定する．尚，任意の等価確率測度 P^ξ は，Girsanov の定理により，Novikov の可積分条件を満たす可測過程 ξ により，Radon-Nikodým 微分として，次式のように表現されることに留意せよ．

$$\frac{d\mathrm{P}^\xi}{d\mathrm{P}} = \exp\!\left(\int_0^\infty \xi_t\,dB_t - \frac{1}{2}\int_0^\infty \xi_t' \xi_t dt\right).$$

そして，彼女或いは彼は各消費計画に対し最悪の場合の等価確率測度を想定して，$\mathbb{P}$ 上で期待効用汎関数を最小化する等価確率測度（以下,「最悪確率」と呼ぶ）を求める．この際，参考確率 P を尤も有り得べき確率と認識している以上，参考確率 P と大幅に乖離する最悪確率を想定することは慎重を通り越して杞憂の誹りを免れない．そこで，最悪確率決定時に参考確率 P との乖離を次のように制御する相似拡大的頑健効用を効用汎関数とする．

$$U(c) = \inf_{\mathrm{P}^\xi \in \mathbb{P}} \mathrm{E}^\xi\left[\int_0^\infty e^{-\beta t}\left\{\frac{c_t^{1-\gamma}}{1-\gamma} + \frac{(1-\gamma)U_t^\xi(c)}{2\delta}\,\xi_t'\xi_t\right\}dt\right], \tag{2.21}$$

ここで，β は割引率，γ は相対的危険回避度，δ は「曖昧性の回避度合」を表す正の定数，U_t^ξ は次式で再帰的に定義される効用過程である．

$$U_t^\xi(c) = \mathrm{E}_t^\xi\left[\int_t^\infty e^{-\beta(s-t)}\left\{\frac{c_s^{1-\gamma}}{1-\gamma} + \frac{(1-\gamma)U_s^\xi(c)}{2\delta}\,\xi_s'\xi_s\right\}ds\right]. \tag{2.22}$$

以下では，δ を「相対的曖昧性回避度」と呼ぶ．

仮定 3. 消費者は相似拡大的頑健効用 *(2.21)* の最大化を企図する．

---

[3] 相似拡大的頑健効用は，Anderson, Hansen, Sargent [1] が提案した「頑健効用」に相似拡大性を付与すべく，Maenhout [11] が修正したものである．

[4] ここで，$\tilde{\mathrm{P}}$ が P の等価確率測度とは，両測度の零集合が一致している場合（$\mathrm{P}(A) = 0 \Leftrightarrow \tilde{\mathrm{P}}(A) = 0$）を言う．

状態過程を $Z_t' = (W_t, X_t', Y_t')$ と表記する．候補確率 P^ξ の下での間接効用汎関数 J^ξ が次式で再帰的に定義される．

$$J^\xi(Z_t) = \mathrm{E}_t^\xi \left[\int_t^\infty e^{-\beta(s-t)} \left\{ \frac{c_s^{1-\gamma}}{1-\gamma} + \frac{(1-\gamma)J^\xi(Z_s)}{2\delta} \xi_s' \xi_s \right\} ds \right]. \tag{2.23}$$

予算制約式 (2.20) を満たす制御過程 $u_t = (c_t, \Psi_t)$ を初期状態 $Z_0' = (W_0, X_0', Y_0')$ に対する許容的制御と呼び，許容的制御の集合を $\mathcal{B}(Z_0)$ と表記する．このとき，本稿における消費と投資の最適化問題及び価値関数 $V(Z_0)$ が次式で定義される．

$$V(Z_0) = \sup_{u \in \mathcal{B}(Z_0)} \inf_{\mathrm{P}^\xi} J^\xi(Z_0). \tag{2.24}$$

3.　最悪確率の決定と間接効用関数の偏微分方程式の導出

本章では，頑健性確保のための最悪確率の決定問題を解いた後，同確率を織り込んだ HJB 方程式から推測された間接効用関数を構成する未知関数 $G(X_t, Y_t)$ の偏微分方程式を導出する．

3.1.　最悪確率の決定

最悪確率候補としての等価確率測度 P^ξ の下での標準ブラウン運動 z^ξ は，

$$B_t^\xi = B_t - \int_0^t \xi_s \, ds,$$

と表されるので，等価確率測度 P^ξ の下での状態変数に関する確率微分方程式は次のように書き改められる．

$$dZ_t = (\mu_t + \Sigma_t \xi_t)\, dt + \Sigma_t \, dB_t^\xi, \tag{3.1}$$

ここで，

$$\mu_t = \begin{pmatrix} \mu_W \\ \mu_X \\ \mu_Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_t(r_t + \Psi_t \Lambda_t) - c_t \\ K_X(\theta_X - X_t) \\ K_Y(\theta_Y - Y_t) \end{pmatrix}, \quad \Sigma_t = \begin{pmatrix} W_t \Psi_t^X & W_t \Psi_t^Y \\ \Sigma_X & 0 \\ 0 & \Sigma_Y \end{pmatrix}.$$

従って，HJB 方程式は次式で表される．

$$\sup_{u \in \mathcal{B}(Z_0)} \inf_{\mathrm{P}^\xi \in \mathbb{P}} \left\{ \mu_t' J_Z^\xi + \frac{1}{2} \mathrm{tr} \left[\Sigma_t \Sigma_t' J_{ZZ}^\xi \right] - \beta J^\xi + \frac{c^{1-\gamma}}{1-\gamma} + \frac{(1-\gamma)J^\xi}{2\delta} \xi_t' \xi_t + (\Sigma_t \xi_t)' J_Z^\xi \right\} = 0, \tag{3.2}$$

$$\text{s.t.} \quad \lim_{T \to \infty} \mathrm{E}[e^{-\beta T} J^{\xi^*}(Z_T)] = 0,$$

ここで，P^{ξ^*} は最悪確率測度である．

HJB 方程式 (3.2) における ξ に関する最小化条件より，最悪確率測度 P^{ξ^*} が次のように求められる．

$$\xi_t^* = -\frac{\delta}{(1-\gamma)J^{\xi^*}} \Sigma_t' J_Z^{\xi^*}. \tag{3.3}$$

最悪確率測度 P^{ξ^*} の下での間接効用関数を改めて J と表記し，P^{ξ^*} を HJB 方程式 (3.2) に代入すると，次式を得る．

$$\sup_{u \in \mathcal{B}(Z_0)} \left[\mu_t' J_Z + \frac{1}{2} \mathrm{tr} \left[\Sigma_t \Sigma_t' J_{ZZ} \right] - \beta J + \frac{c^{1-\gamma}}{1-\gamma} - \frac{\delta}{2(1-\gamma)J} J_Z' \Sigma_t \Sigma_t' J_Z \right] = 0 \tag{3.4}$$

3.2. 最悪確率下の効用最大化

HJB 方程式における最大化の必要条件から最適制御 $u^* = (c^*, \varPsi^*)$ は次式を満たしている．

$$
\begin{aligned}
c_t^* &= J_W^{-\frac{1}{\gamma}}, && (3.5)\\
\varPsi_t^* &= \frac{\psi_t}{W_t^{*2}\left(J_{WW} - \frac{\delta J_W^2}{(1-\gamma)J}\right)}, && (3.6)
\end{aligned}
$$

ここで，W_t^* は最適制御 u^* により達成される富過程であり，

$$
\psi_t = W_t^* \left\{ -J_W \begin{pmatrix} \Lambda_t^X \\ \Lambda_t^Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Sigma_X' & 0 \\ 0 & \Sigma_Y' \end{pmatrix} \left(\frac{\delta J_W}{(1-\gamma)J} \begin{pmatrix} J_X \\ J_Y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} J_{XW} \\ J_{YW} \end{pmatrix} \right) \right\}'. \tag{3.7}
$$

最適消費 (3.5) 式と最適投資 (3.6) 式を HJB 方程式 (3.4) に代入して整理すると，次の間接効用関数 J に関する偏微分方程式が得られる．

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left[\Sigma_X\Sigma_X' J_{XX} + \Sigma_Y\Sigma_Y' J_{YY}\right] - \frac{\delta}{2(1-\gamma)J}\left(J_X'\Sigma_X\Sigma_X' J_X + J_Y'\Sigma_Y\Sigma_Y' J_Y\right) \\
&\quad - \frac{\psi_t\psi_t'}{2W_t^{*2}\left(J_{WW} - \frac{\delta J_W^2}{(1-\gamma)J}\right)} + W_t^* r_t J_W + \mu_X' J_X + \mu_Y' J_Y + \frac{\gamma}{1-\gamma} J_W^{-\frac{1-\gamma}{\gamma}} - \beta J = 0. \quad (3.8)
\end{aligned}
$$

上記偏微分方程式から間接効用関数 $J(Z_t)$ は未知関数 $G(X_t, Y_t)$ を用いて次の関数形で表されると推測される．

$$
J(Z_t) = \frac{W_t^{1-\gamma}}{1-\gamma}\big(G(X_t, Y_t)\big)^{\gamma}. \tag{3.9}
$$

(3.9) 式に偏微分を施し，偏微分方程式 (3.8) に代入すると，次の命題を得る．

命題 1. 仮定 *1-3* の下，本問題 *(2.24)* の最適消費は *(3.10)* 式を，最適投資は *(3.11)* 式をそれぞれ満たしており，間接効用関数 J を構成する未知関数 $G(X_t, Y_t)$ は偏微分方程式 *(3.12)* の解である．

$$
\begin{aligned}
c_t^* &= \frac{W_t}{G(X_t, Y_t)}, && (3.10)\\
\varPsi_t^* &= \frac{1}{\gamma+\delta}\begin{pmatrix} \Lambda_t^X \\ \Lambda_t^Y \end{pmatrix}' + \frac{\gamma(\gamma+\delta-1)}{(\gamma-1)(\gamma+\delta)}\begin{pmatrix} \Sigma_X' \frac{G_X}{G} \\ \Sigma_Y' \frac{G_Y}{G} \end{pmatrix}', && (3.11)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left[\Sigma_X\Sigma_X'\frac{G_{XX}}{G} + \Sigma_Y\Sigma_Y'\frac{G_{YY}}{G}\right] + \frac{\delta}{2(\gamma-1)(\gamma+\delta)}\left(\frac{G_X'}{G}\Sigma_X\Sigma_X'\frac{G_X}{G} + \frac{G_Y'}{G}\Sigma_Y\Sigma_Y'\frac{G_Y}{G}\right) \\
&\quad + \left\{\begin{pmatrix} \mu_X' & \mu_Y' \end{pmatrix} + \frac{\gamma+\delta-1}{\gamma+\delta}\Lambda_t'\begin{pmatrix} \Sigma_X & 0 \\ 0 & \Sigma_Y \end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix} \frac{G_X}{G} \\ \frac{G_Y}{G} \end{pmatrix} + \frac{1}{G} \\
&\quad - \left(\frac{\gamma-1}{2\gamma(\gamma+\delta)}\Lambda_t'\Lambda_t + \frac{\gamma-1}{\gamma}r_t + \frac{\beta}{\gamma}\right) = 0. \quad (3.12)
\end{aligned}
$$

証明. 補論 A.3 参照． □

4. 対数線形近似法による近似解析解の導出

本章では，前章で導出された偏微分方程式の非斉次項を Campbell and Viceira [6]，楠田 [9] の方法で対数線形近似し，近似解析解を導出し，最適投資比率の典型例を示す．

4.1. 偏微分方程式の非斉次項の対数線形近似

偏微分方程式 (3.12) は非斉次項 $1/G$ を含んでおり，解析解の導出を困難にしている．Campbell and Viceira [6] は CRRA 効用とバシチェック金利モデルを仮定し，消費と 2 証券（安全証券と長期物価連動債）投資の最適化問題で導出した金利関数の常微分方程式の近似解析解を導出する際に非斉次項の対数線形近似を用いている．すなわち，(3.10) 式より，$1/G$ が消費・富比率 c_t^*/W_t^* と等しく，同比率が安定的であることに着目し，$1/G$ を $\mathrm{E}[\log(c_t^*/W_t^*)]$ の周りで対数線形近似している．しかし，この場合，$\mathrm{E}[\log(c_t^*/W_t^*)]$ は時間変数に依存する．そこで，楠田 [9] は一定値をとる $\lim_{t\to\infty}\mathrm{E}[\log(c_t^*/W_t^*)]$ の周りで対数線形近似を行っている．本稿もこれに従って非斉次項を次のように対数線形近似する．

$$\frac{1}{G(X_t,Y_t)} \approx g_0 - g_1 \log G(X_t,Y_t), \tag{4.1}$$

ここで，

$$\begin{aligned} g_0 &= g_1(1-\log g_1), &(4.2)\\ g_1 &= \exp\Bigl(\lim_{t\to\infty}\mathrm{E}\Bigl[\log\Bigl(\frac{c_t^*}{W_t^*}\Bigr)\Bigr]\Bigr). &(4.3)\end{aligned}$$

偏微分方程式 (3.12) における非斉次項 $1/G$ を (4.1) 式で近似し，(μ_X,μ_Y) を状態変数 (X_t,Y_t) で表し，Λ_t，r_t に，それぞれ (2.6) 式，(2.7) 式を代入すると，次の近似偏微分方程式を得る．

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left[\Sigma_X\Sigma_X'\frac{G_{XX}}{G}+\Sigma_Y\Sigma_Y'\frac{G_{YY}}{G}\right]+\frac{\delta}{2(\gamma-1)(\gamma+\delta)}\left(\frac{G_X'}{G}\Sigma_X\Sigma_X'\frac{G_X}{G}+\frac{G_Y'}{G}\Sigma_Y\Sigma_Y'\frac{G_Y}{G}\right)\\
&\quad+\left(\begin{pmatrix}K_X(\theta_X-X_t)\\K_Y(\theta_Y-Y_t)\end{pmatrix}+\frac{\gamma+\delta-1}{\gamma+\delta}\begin{pmatrix}\Sigma_X'(\lambda_X+\Lambda_XX_t)\\\Sigma_Y'(\lambda_Y+\Lambda_YY_t)\end{pmatrix}\right)'\begin{pmatrix}\frac{G_X}{G}\\\frac{G_Y}{G}\end{pmatrix}-g_1\log G\\
&\quad+g_0-\frac{\gamma-1}{2\gamma(\gamma+\delta)}\begin{pmatrix}\lambda_X+\Lambda_XX_t\\\lambda_Y+\Lambda_YY_t\end{pmatrix}'\begin{pmatrix}\lambda_X+\Lambda_XX_t\\\lambda_Y+\Lambda_YY_t\end{pmatrix}-\frac{\gamma-1}{\gamma}(r_0+r'X_t)-\frac{\beta}{\gamma}=0.\end{aligned} \tag{4.4}$$

近似偏微分方程式 (4.4) の解が次式で表される 2 次形式の指数関数であることは容易に推測される．

$$G(X_t,Y_t)=\exp\left(a+a_X'X_t+a_Y'Y_t+\frac{1}{2}X_t'A_XX_t+\frac{1}{2}Y_t'A_YY_t+X_t'A_{XY}Y_t\right), \tag{4.5}$$

ここで，A_X，A_Y は一般性を失うことなく対称行列である．

このとき，

$$\begin{aligned}g_1&=-\lim_{t\to\infty}\mathrm{E}\left[\log G(X_t,Y_t)\right]\\
&=\lim_{t\to\infty}\left[-a-a_X\mathrm{E}[X_t]-a_Y\mathrm{E}[Y_t]-\frac{1}{2}\mathrm{E}[X_t'A_XX_t]-\frac{1}{2}\mathrm{E}[Y_t'A_YY_t]-\mathrm{E}[X_t'A_{XY}Y_t]\right]\end{aligned} \tag{4.6}$$

は次の補題で計算される．

補題 3. 仮定 *1-3* の下，g_1 は $(a, a_X, a_Y, A_X, A_Y, A_{XY})$ により次式で表される．

$$
\begin{aligned}
g_1 = -a - a_X\theta_X - a_Y\theta_Y - \frac{1}{2}\theta'_X A_X\theta_X - \frac{1}{2}\theta'_Y A_Y\theta_Y - \theta'_X A_{XY}\theta_Y \\
- \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left[\left(Q_X^{-1}\Sigma_X\right)' M^X Q_X^{-1}\Sigma_X + \left(Q_Y^{-1}\Sigma_Y\right)' M^Y Q_Y^{-1}\Sigma_Y\right], \quad (4.7)
\end{aligned}
$$

ここで，行列 P の第 (i,j) 成分を P_{ij} と表記すると，

$$
M_{ij}^X = \frac{1}{l_i + l_j}(Q'_X A_X Q_X)_{ij}, \qquad M_{ij}^Y = \frac{1}{l_i + l_j}(Q'_Y A_Y Q_Y)_{ij}.
$$

証明．補論 A.3 参照． □

4.2. 近似解析解

(4.5) 式で表される関数 G に偏微分を施し，偏微分方程式 (4.4) に代入し，g_0 に (4.2) 式を代入して整理すると，次式を得る．

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left[\Sigma_X\Sigma'_X A_X + \Sigma_Y\Sigma'_Y A_Y\right] + \frac{1}{2}\left(a'_X\Sigma_X\Sigma'_X a_X + a'_Y\Sigma_Y\Sigma'_Y a_Y\right) \\
&\quad + \left(a'_X\Sigma_X\Sigma'_X A_X + a'_Y\Sigma_Y\Sigma'_Y A'_{XY}\right)X_t + \left(a'_X\Sigma_X\Sigma'_X A_{XY} + a'_Y\Sigma_Y\Sigma'_Y A_Y\right)Y_t \\
&+ X'_t\left(\frac{1}{2}\left(A_X\Sigma_X\Sigma'_X A_X + A_{XY}\Sigma_Y\Sigma'_Y A'_{XY}\right)\right)X_t + Y'_t\left(\frac{1}{2}\left(A'_{XY}\Sigma_X\Sigma'_X A_{XY} + A_Y\Sigma_Y\Sigma'_Y A_Y\right)\right)Y_t \\
&\quad + X'_t\left(\frac{\gamma(\gamma+\delta-1)}{(\gamma-1)(\gamma+\delta)}\left(A_X\Sigma_X\Sigma'_X A_{XY} + A_{XY}\Sigma_Y\Sigma'_Y A_Y\right)\right)Y_t \\
&\quad + \frac{\delta}{2(\gamma-1)(\gamma+\delta)}\left(a'_X\Sigma_X\Sigma'_X a_X + a'_Y\Sigma_Y\Sigma'_Y a_Y\right) \\
&+ \frac{\delta}{(\gamma-1)(\gamma+\delta)}\left\{\left(a'_X\Sigma_X\Sigma'_X A_X + a'_Y\Sigma_Y\Sigma'_Y A'_{XY}\right)X_t + \left(a'_X\Sigma_X\Sigma'_X A_{XY} + a'_Y\Sigma_Y\Sigma'_Y A_Y\right)Y_t\right\} \\
&+ \frac{\delta}{2(\gamma-1)(\gamma+\delta)}\left\{X'_t\left(A_X\Sigma_X\Sigma'_X A_X + A_{XY}\Sigma_Y\Sigma'_Y A'_{XY}\right)X_t + Y'_t\left(A'_{XY}\Sigma_X\Sigma'_X A_{XY} + A_Y\Sigma_Y\Sigma'_Y A_Y\right)Y_t\right\} \\
&\left\{\left(\theta'_X K'_X + \frac{\gamma+\delta-1}{\gamma+\delta}\lambda'_X\Sigma_X\right) + X'_t\left(-K'_X + \frac{\gamma+\delta-1}{\gamma+\delta}\Lambda'_X\Sigma_X\right)\right\}\left(a_X + A_X X_t + A_{XY}Y_t\right) \\
&\left\{\left(\theta'_Y K'_Y + \frac{\gamma+\delta-1}{\gamma+\delta}\lambda'_Y\Sigma_Y\right) + Y'_t\left(-K'_Y + \frac{\gamma+\delta-1}{\gamma+\delta}\Lambda'_Y\Sigma_Y\right)\right\}\left(a_Y + A'_{XY}X_t + A_Y Y_t\right) \\
&\quad + g_1(1 - \log g_1) - g_1\left(a + a'_X X_t + a'_Y Y_t + \frac{1}{2}X'_t A_X X_t + \frac{1}{2}Y'_t A_Y Y_t + X'_t A_{XY} Y_t\right) \\
&\quad - \frac{\gamma-1}{2\gamma(\gamma+\delta)}\left(\lambda'_X\lambda_X + 2\lambda'_X\Lambda_X X_t + X'_t\Lambda'_X\Lambda_X X_t + \lambda'_Y\lambda_Y + 2\lambda'_Y\Lambda_Y Y_t + Y'_t\Lambda'_Y\Lambda_Y Y_t\right) \\
&\qquad - \frac{\gamma-1}{\gamma}(r_0 + r'X_t) - \frac{\beta}{\gamma} = 0. \quad (4.8)
\end{aligned}
$$

上式は (X_t, Y_t) に関する恒等式なので，次の $(a, a_X, a_Y, A_X, A_Y, A_{XY})$ に関する代数方程

式が導出される．

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\mathrm{tr}\big[\Sigma_X\Sigma_X' A_X + \Sigma_Y\Sigma_Y' A_Y\big] + \frac{\gamma(\gamma+\delta-1)}{2(\gamma-1)(\gamma+\delta)}\big(a_X'\Sigma_X\Sigma_X' a_X + a_Y'\Sigma_Y\Sigma_Y' a_Y\big)\\
&\qquad + \Big(\theta_X' K_X' + \frac{\gamma+\delta-1}{\gamma+\delta}\lambda_X'\Sigma_X\Big)a_X + \Big(\theta_Y' K_Y' + \frac{\gamma+\delta-1}{\gamma+\delta}\lambda_Y'\Sigma_Y\Big)a_Y +\\
&\qquad\quad - \frac{\gamma-1}{2\gamma(\gamma+\delta)}(\lambda_X'\lambda_X + \lambda_Y'\lambda_Y) - \frac{\gamma-1}{\gamma}r_0 - \frac{\beta}{\gamma} + g_1(1-a-\log g_1) = 0, \quad (4.9)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\gamma(\gamma+\delta-1)}{(\gamma-1)(\gamma+\delta)}\big(A_X'\Sigma_X\Sigma_X' a_X + A_{XY}\Sigma_Y\Sigma_Y' a_Y\big)\\
&\qquad + A_X'\Big(\frac{\gamma+\delta-1}{\gamma+\delta}\Sigma_X'\lambda_X + K_X\theta_X\Big) + A_{XY}\Big(\frac{\gamma+\delta-1}{\gamma+\delta}\Sigma_Y'\lambda_Y + K_Y\theta_Y\Big)\\
&\qquad + \Big(\frac{\gamma+\delta-1}{\gamma+\delta}\Lambda_X'\Sigma_X - K_X'\Big)a_X - \frac{\gamma-1}{\gamma(\gamma+\delta)}\Lambda_X'\lambda_X - \frac{\gamma-1}{\gamma}r - g_1 a_X = 0, \quad (4.10)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\gamma(\gamma+\delta-1)}{(\gamma-1)(\gamma+\delta)}\big(A_{XY}'\Sigma_X\Sigma_X' a_X + A_Y'\Sigma_Y\Sigma_Y' a_Y\big)\\
&\qquad + A_{XY}'\Big(\frac{\gamma+\delta-1}{\gamma+\delta}\Sigma_X'\lambda_X + K_X\theta_X\Big) + A_Y'\Big(\frac{\gamma+\delta-1}{\gamma+\delta}\Sigma_Y'\lambda_Y + K_Y\theta_Y\Big)\\
&\qquad\qquad + \Big(\frac{\gamma+\delta-1}{\gamma+\delta}\Lambda_Y'\Sigma_Y - K_Y'\Big)a_Y - \frac{\gamma-1}{\gamma(\gamma+\delta)}\Lambda_Y'\lambda_Y - g_1 a_Y = 0, \quad (4.11)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\gamma(\gamma+\delta-1)}{2(\gamma-1)(\gamma+\delta)}\big(A_X\Sigma_X\Sigma_X' A_X + A_{XY}\Sigma_Y\Sigma_Y' A_{XY}'\big)\\
&\qquad\qquad + \Big(\frac{\gamma+\delta-1}{\gamma+\delta}\Lambda_X'\Sigma_X - K_X'\Big)A_X - \frac{\gamma-1}{2\gamma(\gamma+\delta)}\Lambda_X'\Lambda_X - \frac{1}{2}g_1 A_X = 0, \quad (4.12)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\gamma(\gamma+\delta-1)}{2(\gamma-1)(\gamma+\delta)}\big(A_{XY}'\Sigma_X\Sigma_X' A_{XY} + A_Y\Sigma_Y\Sigma_Y' A_Y\big)\\
&\qquad\qquad + \Big(\frac{\gamma+\delta-1}{\gamma+\delta}\Lambda_Y'\Sigma_Y - K_Y'\Big)A_Y - \frac{\gamma-1}{2\gamma(\gamma+\delta)}\Lambda_Y'\Lambda_Y - \frac{1}{2}g_1 A_Y = 0, \quad (4.13)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\gamma(\gamma+\delta-1)}{(\gamma-1)(\gamma+\delta)}\big(A_X\Sigma_X\Sigma_X' A_{XY} + A_{XY}\Sigma_Y\Sigma_Y' A_Y\big)\\
&\quad + \Big(\frac{\gamma+\delta-1}{\gamma+\delta}\Lambda_X'\Sigma_X - K_X'\Big)A_{XY} + A_{XY}\Big(\frac{\gamma+\delta-1}{\gamma+\delta}\Sigma_Y'\Lambda_Y - K_Y\Big) - g_1 A_{XY} = 0, \quad (4.14)
\end{aligned}
$$

ここで，g_1 は (4.6) 式で表されている．

間接効用関数を構成する未知関数が近似偏微分方程式 (4.4) の解として近似されている場合の間接効用関数，最適消費，最適投資をそれぞれ「近似間接効用関数」,「近似最適消費」,「近似最適投資比率」と呼び，それぞれ $\tilde{J}, \tilde{c}^*, \tilde{\Psi}^*$ と表記する．このとき，次の命題を得る．

命題 2. 仮定 *1-3* の下，本問題 *(2.24)* の近似間接効用関数，近似最適消費，近似最適投資比率は次を満たしている．

$$
\begin{aligned}
\tilde{J}(Z_t^*) &= \exp\left[\gamma\left(a + a_X' X_t + a_Y' Y_t + \frac{1}{2}X_t' A_X X_t + \frac{1}{2}Y_t' A_Y Y_t + X_t' A_{XY} Y_t\right)\right]\frac{W_t^{*1-\gamma}}{1-\gamma}, && (4.15)\\
\tilde{c}_t^* &= \exp\left[-\left(a + a_X' X_t + a_Y' Y_t + \frac{1}{2}X_t' A_X X_t + \frac{1}{2}Y_t' A_Y Y_t + X_t' A_{XY} Y_t\right)\right] W_t^*, && (4.16)\\
\tilde{\Psi}_t^* &= \frac{1}{\gamma+\delta}\begin{pmatrix}\lambda_X + \Lambda_X X_t\\ \lambda_Y + \Lambda_Y Y_t\end{pmatrix}' + \frac{\gamma(\gamma+\delta-1)}{(\gamma-1)(\gamma+\delta)}\begin{pmatrix}\Sigma_X'\left(a_X + A_X X_t + A_{XY} Y_t\right)\\ \Sigma_Y'\left(a_Y + A_{XY}' X_t + A_Y Y_t\right)\end{pmatrix}', && (4.17)
\end{aligned}
$$

ここで，$(a, a_X, a_Y, A_X, A_Y, A_{XY})$ は代数方程式 *(4.9)-(4.14)* の解である．

4.3. 最適投資比率の典型例

標準ブラウン運動が $\bar{N}$ 次元で，非債券の主要指数が国内 J 種類，海外第 n 国 $\hat{J}_n$ 種類なので，割引国債については，国内 I 群，海外第 n 国 $\hat{I}_n$ 群の投資対象を $\bar{N} = I + J + \sum_{n=1}^{N}(\hat{I}_n + \hat{J}_n)$ を満たすように設定することにより，最適投資を決定出来る．本節では，典型的な国債投資戦略として，国債投資比率密度を対象とする投資戦略，国債投資比率を対象とする投資戦略を取り上げ，各戦略における最適投資比率を示す．

「危険証券」（非短期安全証券）の投資比率を表す $\bar{N} \times 1$ ベクトル Φ_t 及び危険証券のボラティリティを表す $N \times M$ 行列 B を次のように表記する．

$$
\Phi_t = \begin{pmatrix}\Phi_t^P\\ \Phi_t^S\\ \hat{\Phi}_{1t}^P\\ \hat{\Phi}_{1t}^S\\ \vdots\\ \hat{\Phi}_{Nt}^P\\ \hat{\Phi}_{Nt}^S\end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix}B^P\\ B^S\\ \hat{B}_1^P\\ \hat{B}_1^S\\ \vdots\\ \hat{B}_N^P\\ \hat{B}_N^S\end{pmatrix}. \tag{4.18}
$$

また，次の記法を用いる．

$$
\begin{aligned}
\Delta\Lambda^X &= \begin{pmatrix}0_{M\times(I+J)} & \Delta\Lambda_1^X & \Delta\Lambda_2^X & \cdots & \Delta\Lambda_N^X\end{pmatrix}, && (4.19)\\
\Delta\Lambda^Y &= \begin{pmatrix}0_{N\times(I+J)} & \Delta\Lambda_1^Y & \Delta\Lambda_2^Y & \cdots & \Delta\Lambda_N^Y\end{pmatrix}, && (4.20)
\end{aligned}
$$

ここで，$\Delta\Lambda_n^X$ は $M \times (\hat{I}_n + \hat{J}_n)$ 行列，$\Delta\Lambda_n^Y$ は $N \times (\hat{I}_n + \hat{J}_n)$ 行列で，次のように定義されている．

$$
\begin{aligned}
\Delta\Lambda_n^X &= \begin{pmatrix}\lambda_X - \hat{\lambda}_X^n & \lambda_X - \hat{\lambda}_X^n & \cdots & \lambda_X - \hat{\lambda}_X^n\end{pmatrix}, && (4.21)\\
\Delta\Lambda_n^Y &= \begin{pmatrix}\lambda_Y - \hat{\lambda}_Y^n & \lambda_Y - \hat{\lambda}_Y^n & \cdots & \lambda_Y - \hat{\lambda}_Y^n\end{pmatrix}. && (4.22)
\end{aligned}
$$

4.3.1. 国債投資比率密度を対象とする投資戦略

消費者が割引国債の満期までの期間を国内 I 群，海外第 n 国 $\hat{I}_n$ 群に区分し，各時点において各区分への投資比率密度を一定とする投資戦略を採用する場合を考察する．説明の便宜上，$(\tau_0, \tau_I) = (0, \bar{\tau})$，$(\hat{\tau}_0^n, \hat{\tau}_{\hat{I}}^n) = (0, \hat{\tau}_n)$ と表記し，割引国債の満期までの期間を国内

$(\tau_0,\tau_1],(\tau_1,\tau_2],\cdots,(\tau_{I-1},\tau_I]$，海外第 n 国 $(\hat\tau_0^n,\hat\tau_1^n],(\hat\tau_1,\hat\tau_2],\cdots,(\hat\tau^n_{\hat I_n-1},\hat\tau^n_{\hat I_n}]$ に区分する．また，投資比率密度過程を国内 $(\varphi_t^1,\varphi_t^2,\cdots,\varphi_t^I)$，海外第 n 国 $(\hat\varphi^1_{nt},\hat\varphi^2_{nt},\cdots,\hat\varphi^{\hat I_n}_{nt})$ とする．次の記法を用いる．

$$\Phi_t^P=\begin{pmatrix}\varphi_t^1(\tau_1-\tau_0)\\ \varphi_t^2(\tau_2-\tau_1)\\ \vdots\\ \varphi_t^I(\tau_I-\tau_{I-1})\end{pmatrix},\quad \Phi_t^S=\begin{pmatrix}\Phi_t^1\\ \Phi_t^2\\ \vdots\\ \Phi_t^J\end{pmatrix},\quad \hat\Phi^P_{nt}=\begin{pmatrix}\hat\varphi^1_{nt}(\tau_1-\tau_0)\\ \hat\varphi^2_{nt}(\tau_2-\tau_1)\\ \vdots\\ \hat\varphi^{\hat I}_{nt}(\tau_{\hat I_n}-\tau_{\hat I_n-1})\end{pmatrix},\quad \hat\Phi^S_{nt}=\begin{pmatrix}\hat\Phi^1_{nt}\\ \hat\Phi^2_{nt}\\ \vdots\\ \hat\Phi^{\hat J_n}_{nt}\end{pmatrix},$$

$$B^P=\begin{pmatrix}\int_{\tau_0}^{\tau_1}b'(\tau)d\tau\\ \int_{\tau_1}^{\tau_2}b'(\tau)d\tau\\ \vdots\\ \int_{\tau_{I-1}}^{\tau_I}b'(\tau)d\tau\end{pmatrix},\quad B^S=\begin{pmatrix}b'_1\\ b'_2\\ \vdots\\ b'_J\end{pmatrix},\quad \hat B^P_n=\begin{pmatrix}\int_{\tau_0}^{\tau_1}\hat b'_n(\tau)d\tau\\ \int_{\tau_1}^{\tau_2}\hat b'_n(\tau)d\tau\\ \vdots\\ \int_{\tau_{I_n-1}}^{\tau_{I_n}}\hat b'_n(\tau)d\tau\end{pmatrix},\quad \hat B^S_n=\begin{pmatrix}\hat b'_{n1}\\ \hat b'_{n2}\\ \vdots\\ \hat b'_{\hat J_n}\end{pmatrix}.$$

このとき，(4.17) 式より，危険証券への近似最適投資比率 $\tilde\Phi_t^*$ は次式で表される．

$$\begin{aligned}\tilde\Phi_t^*=&\frac{1}{\gamma+\delta}\begin{pmatrix}\Sigma'_XB'+\Delta\Lambda^X\\ \Delta\Lambda^Y\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\lambda_X+\Lambda_XX_t\\ \lambda_Y+\Lambda_YY_t\end{pmatrix}\\ &+\frac{\gamma(\gamma+\delta-1)}{(\gamma-1)(\gamma+\delta)}\begin{pmatrix}\Sigma'_XB'+\Delta\Lambda^X\\ \Delta\Lambda^Y\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\Sigma'_X\left(a_X+A_XX_t+A_{XY}Y_t\right)\\ \Sigma'_Y\left(a_Y+A'_{XY}X_t+A_YY_t\right)\end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{4.23}$$

尚，短期安全証券への近似最適投資比率は，

$$1-\left(\sum_{i=1}^I\tilde\varphi_t^{*i}(\tau_i-\tau_{i-1})+\sum_{j=1}^J\tilde\Phi_t^{*j}\right)-\sum_{n=1}^N\left(\sum_{i=1}^{\hat I_n}\tilde{\hat\varphi}^{*i}_{nt}(\hat\tau_i-\hat\tau_{i-1})+\sum_{j=1}^{\hat J_n}\tilde{\hat\Phi}^{*j}_{nt},\right),\tag{4.24}$$

である．

4.3.2. 国債投資比率を対象とする投資戦略

消費者が国内 I 種類，海外第 n 国 $\hat I_n$ 種類の一定満期の割引国債を投資対象とする戦略を採用する場合を考察する．投資対象国債の満期を国内 $0<\tau_1<\tau_2<\cdots<\tau_I\le\bar\tau$，海外第 n 国 $0<\hat\tau_1<\hat\tau_2<\cdots<\hat\tau_{\hat I}\le\hat\tau_n$ とする．また，国債の投資比率過程を国内 $\Phi^1_{Pt},\Phi^2_{Pt},\cdots,\Phi^I_{Pt}$，海外第 n 国 $\hat\Phi^1_{Pnt},\hat\Phi^2_{Pnt},\cdots,\hat\Phi^{\hat I_n}_{Pnt}$ とする．次の記法を用いる．

$$\Phi_t^P=\begin{pmatrix}\Phi^1_{Pt}\\ \Phi^2_{Pt}\\ \vdots\\ \Phi^I_{Pt}\end{pmatrix},\quad \Phi_t^S=\begin{pmatrix}\Phi_t^1\\ \Phi_t^2\\ \vdots\\ \Phi_t^J\end{pmatrix},\quad \hat\Phi^P_{nt}=\begin{pmatrix}\hat\Phi^1_{Pnt}\\ \hat\Phi^2_{Pnt}\\ \vdots\\ \hat\Phi^{\hat I_n}_{Pnt}\end{pmatrix},\quad \hat\Phi^S_{nt}\begin{pmatrix}\hat\Phi^1_{nt}\\ \hat\Phi^2_{nt}\\ \vdots\\ \hat\Phi^{\hat J_n}_{nt}\end{pmatrix},$$

$$B^P=\begin{pmatrix}b'(\tau_1)\\ b'(\tau_2)\\ \vdots\\ b'(\tau_I)\end{pmatrix},\quad B^S=\begin{pmatrix}b'_1\\ b'_2\\ \vdots\\ b'_J\end{pmatrix},\quad \hat B^P_n=\begin{pmatrix}\hat b'_n(\hat\tau_1)\\ \hat b'_n(\hat\tau_2)\\ \vdots\\ \hat b'_n(\hat\tau_{\hat I_n})\end{pmatrix},\quad \hat B^S_n=\begin{pmatrix}\hat b'_{n1}\\ \hat b'_{n2}\\ \vdots\\ \hat b'_{n\hat J}\end{pmatrix}$$

このとき，(4.17) 式より，危険証券への近似最適投資比率 Φ_t^* は (4.23) 式で表される．尚，短期安全証券への近似最適投資比率は，

$$1-\left(\sum_{i=1}^{I}\tilde{\Phi}_{Pt}^{*i}+\sum_{j=1}^{J}\tilde{\Phi^{*j}}_t\right)-\sum_{n=1}^{N}\left(\sum_{i=1}^{\hat{I}_n}\tilde{\hat{\Phi}}_{Pnt}^{*i}+\sum_{j=1}^{\hat{J}_n}\tilde{\hat{\Phi}}_{nt}^{*j}\right), \tag{4.25}$$

である．

留意点 1. 国際証券投資を国内証券投資と比較するため，国内証券のみに投資する場合，すなわち，$\bar{N}=I+J$ で，

$$\Phi_t=\begin{pmatrix}\Phi_t^P\\ \Phi_t^S\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}B^P\\ B^S\end{pmatrix}, \tag{4.26}$$

の場合を考察すると，この場合の近似最適投資比率 $\tilde{\Phi}_t$ は，

$$\tilde{\Phi}_t=\frac{1}{\gamma+\delta}(\Sigma_X'B')^{-1}\big(\lambda_X+\Lambda_X X_t\big)+\frac{\gamma(\gamma+\delta-1)}{(\gamma-1)(\gamma+\delta)}(\Sigma_X'B')^{-1}\Sigma_X'\big(a_X+A_X X_t\big), \tag{4.27}$$

と表される．

(4.23)(4.27) 両式を比較すると，国際証券投資における最適投資比率は，為替レート固有の状態過程 Y_t の変化の影響を，第 *1* 項の近視眼的需要では，為替レート固有のリスクの市場価格（$\Lambda_t^Y=\lambda_Y+\Lambda_Y X_t$）の変化を通じて間接的に，第 *2* 項の保険需要項では，直接的に受けている．そして，最適投資比率の同変化に対する感応度にリスクの市場価格の内外価格差を表す $\Delta\Lambda^X$，$\Delta\Lambda^Y$ が影響を及ぼしている．

5.　今後の課題

近似間接効用関数を構成する係数体系 $(a,a_X,a_Y,A_X,A_Y,A_{XY})$ に関する代数方程式 (4.9)-(4.14) は一般に解が複数存在するので，これら複数の解は本問題の最適解の候補に過ぎない．これら複数の候補解から最適解を識別する必要がある．実用的には，想定される状態変数空間の領域内の幾つかの初期状態 Z_0 に対し，近似価値関数 $\tilde{V}(Z_0)$ の数値の大小関係を比較すれば識別出来るのかもしれない．しかし，算出される近似価値関数の数値には近似誤差も含まれるため，大小関係が微差といった場合は最適解を識別出来たのか，不安を払拭し難い．こうした観点から，バトボルド他 [2] では，Maslowski and Veverka [13] の理論を援用して，上記複数候補解から最適解を識別するための十分条件を与えた．Maslowski and Veverka [13] では，通常の最大化問題を対象としており，本稿のような最小・最大化問題に適用することは出来ない．本稿の問題に対しても，最適解の十分条件を提示することは今後の課題である．

本稿では，対数線形近似により近似解析解を導いたが，近似最適投資比率の近似精度を分析するには至っていない．近似最適投資比率を厳密解に基づく最適投資比率と比較するためには，証券市場モデルのパラメータを推定した後，価値関数のパラメータの代数方程式を数値解法により解いて近似最適投資比率を算出するほか，厳密解に基づく最適投資比率は非斉次偏微分方程式の数値解法により計算する必要がある．本稿で仮定された一般性の高いアフィン潜在ファクター証券市場モデルの特定化において，対象証券を株式指数，REIT 指数，短期国債，長期国債に限定した最小限の 3 ファクター・モデルの推定でさえも，カルマン・フィルター推定やベイジアン推定といった計算負担の重い方法で推定しなければならな

いほか，厳密解に基づく最適投資比率は3変数関数の非線形・非斉次偏微分方程式 (3.12) の数値解法により計算しなければならない．以上の点を考慮して，本稿では近似最適投資比率の近似精度の分析を断念せざるを得なかった．

参考文献

[1] E. Anderson, L. Hansen, and T. Sargent: A quartet of semi-groups for model specification, robustness, prices of risk, and model detection. *Journal of the European Economic Association*, **1** (2003) , 68-123.

[2] バトボルドボロルソフタ，菊池健太郎，楠田浩二：消費と長期証券投資の最適化問題に対する近似解析解．Discussion paper J-60，滋賀大学経済学部附属リスク研究センター (2018)．

[3] バトボルドボロルソフタ，菊池健太郎，楠田浩二：相似拡大的頑健効用に基づく消費と長期証券投資の最適化問題に対する近似解析解．Discussion paper J-61，滋賀大学経済学部附属リスク研究センター (2018)．

[4] J. Campbell: Intertemporal asset pricing without consumption data. *American Economic Review*, **83** (1993), 487-512.

[5] J. Campbell, P. Maenhout, and L. Viceira: Stock market mean reversion and the optimal equity allocation of a long-lived investor. *European Economic Review*, **5**, (2001), 269-292.

[6] J. Campbell, and L. Viceira: *Strategic Asset Allocation* (Oxford University Press, Oxford, New York, 2002).

[7] D. Duffie, and R. Kan: A yield-factor model of interest rates. *Mathematical Finance*, **6** (1996), 379-406.

[8] 菊池健太郎：アフィン潜在ファクター国際証券市場モデル．mimeo (2018)．

[9] 楠田浩二：消費と債券投資の多期間最適化問題における高次の近似解析解．Discussion paper J-35，滋賀大学経済学部附属リスク研究センター (2013)．

[10] M. Leippold, and L. Wu: Design and estimation of multi-currency quadratic models. *Review of Finance*, **11** (2007), 167-207.

[11] P. Maenhout: Robust portfolio rules and asset pricing. *The Review of Financial Studies*, **17** (2004), 951-984.

[12] H. Mamaysky: A model for pricing stocks and bonds. Working paper 02-10, International Center for Finance, Yale School of Management (2002).

[13] B. Maslowski, and P. Veverka: Sufficient stochastic maximum principle for discounted control problem. *Applied Mathematics and Optimization*, **70** (2014), 225-252.

[14] C. Skiadas: Robust control and recursive utility. *Finance and Stochastics*, **7** (2003), 475-489.

A.　証明

A.1.　補題 1 の証明

標準ブラウン運動 B とリスクの市場価格 Λ により，

$$\tilde{B}_t = B_t + \int_0^t \Lambda_s \, ds, \tag{A.1}$$

で定義される確率過程 $\tilde{B}_t$ は，Girsanov の定理より，リスク中立確率測度下の標準ブラウン運動である．よって，リスク中立確率測度の下で，潜在ファクター X_t の確率微分方程式は，

$$\begin{aligned} dX_t &= \left(K_X(\theta_X - X_t) - \Sigma_X \Lambda_t^X\right) dt + \Sigma \, d\tilde{B}_t^X \\ &= \{K_X\theta_X - \Sigma_X\lambda_X - (K_X + \Sigma_X\Lambda_X)X_t\} \, dt + \Sigma \, d\tilde{B}_t^X, \end{aligned}$$

と表現される．

今，割引国債 P^T を r_t の上に書かれた派生資産と看做すと，r_t は X_t のアフィン関数なので，滑らかな関数 $f(X_t, t)$ により，

$$P_t^T = f(X_t, t), \tag{A.2}$$

と表される．このとき，無裁定条件から，f は次の偏微分方程式の解となっていることが示される．

$$f_t + \{K_X\theta - \Sigma_X\lambda_X - (K_X + \Sigma_X\Lambda_X)X_t\}' f_X + \frac{1}{2}\mathrm{tr}[\Sigma_X\Sigma_X' f_{XX}] - (r_0 + r'X_t)f = 0,$$
$$f(X_T, T) = 1. \tag{A.3}$$

一方，本モデルはアフィン・モデルなので，$\tau = T - t$ とおくと，上記偏微分方程式の解 f は滑らかな関数 $b_0(\tau), b(\tau)$ によって

$$f(X_t, t) = e^{b_0(\tau) + b(\tau)'X_t}, \qquad (b_0(0), b(0)) = (0, 0), \tag{A.4}$$

と書けることが示される．(A.4) 式に偏微分を施し，(A.3) 式に代入すると，次式を得る．

$$-\frac{db_0(\tau)}{d\tau} - \frac{db(\tau)'}{d\tau}X_t + b(\tau)'\{K_X\theta_X - \Sigma_X\lambda_X - (K_X + \Sigma_X\Lambda_X)X_t\}$$
$$+ \frac{1}{2}b'(\tau)\Sigma_X\Sigma_X' b(\tau) - (r_0 + r'X_t) = 0. \tag{A.5}$$

(A.5) 式は X_t の恒等式であるから，X_t の係数を整理すると，(A.5) 式を得る．最後に，(A.4) 式を対数微分して P_t^T の確率微分方程式を導出すると，(2.10) 式を得る．

非債券の第 j 指数を $\tilde{S}_t^j$ と表記する．このとき，Mamaysky [12] より，$\tilde{S}_t^j$ は次式で表され，

$$\tilde{S}_t^j = \exp(a_j t + b_j' X_t). \tag{A.6}$$

配当率過程は次式となる．

$$\frac{D_t^j}{\tilde{S}_t^j} = (c_j + d_j' X_t). \tag{A.7}$$

(A.6)(A.7) 両式より，配当込み指数に関する無裁定条件から，次式を得る．

$$a_j + b_j'\{K_X\theta_X - \Sigma_X\lambda_X - (K_X + \Sigma_X\Lambda_X)X_t\} + \frac{1}{2}b_j'\Sigma_X\Sigma_X' b_j + (c_j + d_j'X_t) - (r_0 + r'X_t) = 0. \quad (A.8)$$

(A.8) 式は X_t の恒等式であるから，X_t の係数を整理すると，(2.13) 式を得る．

為替レートと海外証券価格は，菊池 [8] に沿って証明する．先ず，国内外の金利期間構造の状態価格密度過程は，定義より，次式を満たしている．

$$\frac{d\rho_t}{\rho_t} = -r_t dt - \Lambda_t^X\, dB_t^X, \qquad \frac{d\hat{\rho}_t^n}{\hat{\rho}_t^n} = -\hat{r}_t dt - \hat{\Lambda}_{nt}^X\, dB_t^X. \quad (A.9)$$

次に，国内外の状態価格密度過程の関係については，定義より，次式が成り立っている．

$$\hat{\pi}_t^n = \pi_t^n \varepsilon_t^n. \quad (A.10)$$

よって，(A.10) 式に，(2.3) 式を代入し，自然対数をとると，

$$\log\varepsilon_t^n = \log\hat{\rho}_t^n + \log\hat{\nu}_t^n - \log\rho_t - \log\nu_t. \quad (A.11)$$

上式を伊藤の補題を用いて微分し，(A.9) 式と (2.4) 式を代入すると，(2.14) 式が導かれる．

海外証券については，先ず，第 n 国債の当該国通貨における無裁定条件から次式が成り立っている．

$$\frac{d\hat{P}_{nt}^T}{\hat{P}_{nt}^T} = \left(\hat{r}_t + \hat{b}_n'(\tau)\Sigma_X\hat{\Lambda}_t^X\right) dt + \hat{b}_n'(\tau)\Sigma_X\, dB_t^X, \quad (A.12)$$

ここで，$\hat{b}(\tau)$ は常微分方程式 (2.16) の解である．

ゆえに，$\hat{P}_{nt}^T\varepsilon_t^n$ を微分し，(2.14) 式と (A.12) 式を代入すると，(2.15) 式が得られる．海外の非債券主要指数についても，同様にして，(2.17) 式を得る．

A.2.　補題 2 の証明

満期までの期間 τ の国内割引国債価格を $P_t(\tau)$，海外第国割引国債価格を $\hat{P}_{nt}(\tau)$ と表記する．国内短期安全証券，国内割引国債，国内主要指数，海外割引国債，海外主要指数から組成されるポートフォリオを $(\vartheta, (\vartheta(\tau)), (\vartheta^j), (\hat{\vartheta}_n(\tau)), (\hat{\vartheta}_n^j))$ とすると，次式が成り立つ．

$$W_t = \vartheta_t P_t + \int_0^{\bar{\tau}} \vartheta_t(\tau)P_t(\tau)d\tau + \sum_{j=1}^{J}\vartheta_t^j S_t^j + \sum_{n=1}^{N}\int_0^{\hat{\tau}_n}\hat{\vartheta}_{nt}(\tau)\hat{P}_{nt}(\tau)d\tau + \sum_{n=1}^{N}\sum_{j=1}^{\hat{J}_n}\hat{\vartheta}_{nt}^j\hat{S}_{nt}^j.$$

このとき，所与の c の下，自己資金充足的ポートフォリオ $(\vartheta, (\vartheta(\tau)), (\vartheta^j), (\hat{\vartheta}_n(\tau)), (\hat{\vartheta}_n^j))$

は，次式を満たしている．

$$
\begin{aligned}
dW_t &= \vartheta_t dP_t + \int_0^{\bar{\tau}} \vartheta_t(\tau) dP_t(\tau) d\tau + \sum_{j=1}^{J} \vartheta_t^j dS_t^j \\
&\quad + \sum_{n=1}^{N} \int_0^{\hat{\tau}_n} \hat{\vartheta}_{nt}(\tau) d\hat{P}_{nt}(\tau) d\tau + \sum_{n=1}^{N} \sum_{j=1}^{\hat{J}_n} \vartheta_{nt}^j d\hat{S}_{nt}^j - c_t dt \\
&= W_t \Bigg\{ \left(1 - \int_0^{\bar{\tau}} \varphi_t(\tau) d\tau - \sum_{j=1}^{J} \Phi_t^J - \sum_{n=1}^{N} \int_0^{\hat{\tau}_n} \hat{\varphi}_{nt}(\tau) d\tau - \sum_{n=1}^{N} \sum_{j=1}^{\hat{J}_n} \hat{\Phi}_{nt}^j \right) \frac{dP_t}{P_t} \\
&+ \int_0^{\bar{\tau}} \varphi_t(\tau) \frac{dP_t(\tau)}{P_t(\tau)} d\tau + \sum_{j=1}^{J} \Phi_t^j \frac{dS_t^j}{S_t^j} + \sum_{n=1}^{N} \int_0^{\hat{\tau}_n} \hat{\varphi}_{nt}(\tau) \frac{d\hat{P}_{nt}(\tau)}{\hat{P}_{nt}(\tau)} d\tau + \sum_{n=1}^{N} \sum_{j=1}^{\hat{J}_n} \hat{\Phi}_{nt}^j \frac{d\hat{S}_{nt}^j}{\hat{S}_{nt}^j} \Bigg\} - c_t dt.
\end{aligned}
$$

上式に，(2.9)(2.10)(2.12)(2.15)(2.17) 式を代入し，整理すると，(2.20) 式を得る．

A.3.　命題 1 の証明

先ず，最適消費は，

$$
c_t^* = J_W^{-\frac{1}{\gamma}} = \left\{ \left(\frac{G}{W_t} \right)^{\gamma} \right\}^{-\frac{1}{\gamma}} = \frac{W_t}{G},
$$

すなわち，(3.10) 式が得られる．

次に，間接効用関数に偏微分を施すと，次の式群を得る．

$$
W_t J_W = (1-\gamma) J, \qquad J_X = \gamma\, J \frac{G_X}{G}, \qquad J_Y = \gamma\, J \frac{G_Y}{G},
$$

$$
W_t^2 J_{WW} = -\gamma(1-\gamma) J, \qquad W_t J_{XW} = \gamma(1-\gamma) J \frac{G_X}{G}, \qquad W_t J_{YW} = \gamma(1-\gamma) J \frac{G_Y}{G},
$$

$$
J_{XX} = \gamma\, J \left\{ (\gamma-1) \frac{G_X}{G} \frac{G_X'}{G} + \frac{G_{XX}}{G} \right\}, \qquad J_{YY} = \gamma\, J \left\{ (\gamma-1) \frac{G_Y}{G} \frac{G_Y'}{G} + \frac{G_{YY}}{G} \right\}.
$$

間接効用関数の偏微分結果より，最適投資 (3.6) 式右辺の分子，分母は次のように表される．

$$
\psi_t = J \left((\gamma-1) \begin{pmatrix} \Lambda_t^X \\ \Lambda_t^Y \end{pmatrix} + \gamma(\gamma+\delta-1) \begin{pmatrix} \Sigma_X' \frac{G_X}{G} \\ \Sigma_Y' \frac{G_Y}{G} \end{pmatrix} \right)', \tag{A.13}
$$

$$
W_t^2 \left(J_{WW} - \frac{\delta J_W^2}{(1-\gamma) J} \right) = (\gamma-1)(\gamma+\delta) J. \tag{A.14}
$$

ゆえに，最適投資 (3.6) 式に (A.13)(A.14) 式を代入すると，(3.11) 式を得る．

間接効用関数 J の偏微分方程式 (3.8) における第 1 項〜第 3 項は，(A.13)(A.14) 式を代入

し整理すると，次式が得られる．

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\operatorname{tr}\left[\Sigma_X\Sigma_X' J_{XX}+\Sigma_Y\Sigma_Y' J_{YY}\right]\\
&\qquad -\frac{\delta}{2(1-\gamma)J}\left(J_X'\Sigma_X\Sigma_X' J_X+J_Y'\Sigma_Y\Sigma_Y' J_Y\right)-\frac{\psi_t\psi_t'}{2W_t^2\left(J_{WW}-\frac{\delta J_W^2}{(1-\gamma)J}\right)}\\
&=\frac{\gamma}{2}J\operatorname{tr}\left[\Sigma_X\Sigma_X'\left\{(\gamma-1)\frac{G_X}{G}\frac{G_X'}{G}+\frac{G_{XX}}{G}\right\}+\Sigma_Y\Sigma_Y'\left\{(\gamma-1)\frac{G_Y}{G}\frac{G_Y'}{G}+\frac{G_{YY}}{G}\right\}\right]\\
&\qquad +\frac{\gamma^2\delta}{2(\gamma-1)}J\left(\frac{G_X'}{G}\Sigma_X\Sigma_X'\frac{G_X}{G}+\frac{G_Y'}{G}\Sigma_Y\Sigma_Y'\frac{G_Y}{G}\right)-\frac{1}{2(\gamma-1)(\gamma+\delta)}J\\
&\times\left((\gamma-1)\begin{pmatrix}\Lambda_t^X\\ \Lambda_t^Y\end{pmatrix}+\gamma(\gamma+\delta-1)\begin{pmatrix}\Sigma_X'\frac{G_X}{G}\\ \Sigma_Y'\frac{G_Y}{G}\end{pmatrix}\right)'\left((\gamma-1)\begin{pmatrix}\Lambda_t^X\\ \Lambda_t^Y\end{pmatrix}+\gamma(\gamma+\delta-1)\begin{pmatrix}\Sigma_X'\frac{G_X}{G}\\ \Sigma_Y'\frac{G_Y}{G}\end{pmatrix}\right)\\
&=J\left\{\frac{\gamma}{2}\operatorname{tr}\left[\Sigma_X\Sigma_X'\frac{G_{XX}}{G}+\Sigma_Y\Sigma_Y'\frac{G_{YY}}{G}\right]-\frac{\gamma-1}{2(\gamma+\delta)}\Lambda_t'\Lambda_t\right.\\
&\qquad -\frac{\gamma(\gamma+\delta-1)}{\gamma+\delta}\left((\Lambda_t^X)'\Sigma_X'\frac{G_X}{G}+(\Lambda_t^Y)'\Sigma_Y'\frac{G_Y}{G}\right)\\
&\qquad \left.+\frac{\gamma}{2}\left(\gamma-1+\frac{\gamma\delta}{\gamma-1}-\frac{\gamma(\gamma+\delta-1)^2}{(\gamma-1)(\gamma+\delta)}\right)\left(\frac{G_X'}{G}\Sigma_X\Sigma_X'\frac{G_X}{G}+\frac{G_Y'}{G}\Sigma_Y\Sigma_Y'\frac{G_Y}{G}\right)\right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&=\gamma J\left\{\frac{1}{2}\operatorname{tr}\left[\Sigma_X\Sigma_X'\frac{G_{XX}}{G}+\Sigma_Y\Sigma_Y'\frac{G_{YY}}{G}\right]-\frac{\gamma-1}{2\gamma(\gamma+\delta)}\Lambda_t'\Lambda_t\right.\\
&\qquad -\frac{\gamma+\delta-1}{\gamma+\delta}\begin{pmatrix}\Lambda_t^X\\ \Lambda_t^Y\end{pmatrix}'\begin{pmatrix}\Sigma_X' & 0\\ 0 & \Sigma_Y'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{G_X}{G}\\ \frac{G_Y}{G}\end{pmatrix}\\
&\qquad \left.+\frac{\delta}{2(\gamma-1)(\gamma+\delta)}\left(\frac{G_X'}{G}\Sigma_X\Sigma_X'\frac{G_X}{G}+\frac{G_Y'}{G}\Sigma_Y\Sigma_Y'\frac{G_Y}{G}\right)\right\}. \qquad \text{(A.15)}
\end{aligned}$$

間接効用関数の偏微分方程式 (3.8) における第 7 項は，(3.5) 式を代入し整理すると，

$$\frac{\gamma}{1-\gamma}J_W^{1-\frac{1}{\gamma}}=\gamma\frac{J}{W}\left\{\left(\frac{G}{W}\right)^{\gamma}\right\}^{-\frac{1}{\gamma}}=\gamma\,\frac{J}{G}, \qquad \text{(A.16)}$$

を得る．

(A.15)(A.16) 式等を間接効用関数の偏微分方程式 (3.8) に代入し，両辺を γJ で除して整理すると，(3.12) 式が得られる．

A.4. 補題 3 の証明

X_t は線形確率微分方程式 (2.1) の解として，次のように表される．

$$X_t=Q_Xe^{-tL_X}Q_X^{-1}X_0+Q_X\left(I-e^{-tL_X}\right)Q_X^{-1}\theta_X+Q_X\int_0^t e^{-(t-s)L_X}Q_X^{-1}\Sigma_X dB_s$$

よって，$\lim_{t\to\infty} e^{-tL_X} = 0, \qquad \mathrm{E}[dB_s] = 0$ に注意すると，$\lim_{t\to\infty} \mathrm{E}[X_t] = \theta_X$ が得られる．次に，

$$X_t' A_X X_t = \left\{ Q_X e^{-tL_X} Q_X^{-1} X_0 + Q_X \left(I - e^{-tL_X}\right) Q_X^{-1} \theta_X + Q_X \int_0^t e^{-(t-s)L_X} Q_X^{-1} \Sigma_X dB_s \right\}' \times$$
$$A_X \left\{ Q_X e^{-tL_X} Q_X^{-1} X_0 + Q_X \left(I - e^{-tL_X}\right) Q_X^{-1} \theta_X + Q_X \int_0^t e^{-(t-s)L_X} Q_X^{-1} \Sigma_X dB_s \right\}$$

ゆえに，$\mathrm{E}[dB_s dB_t'] = \delta_{st} I ds$ に注意すると，

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} \mathrm{E}[X_t' A_X X_t] &= \theta_X' A_X \theta_X + \lim_{t\to\infty} \int_0^t \mathrm{tr}\left[(Q_X^{-1}\Sigma_X)' e^{-(t-s)L_X} Q_X' A_X Q_X e^{-(t-s)L_X} Q_X^{-1} \Sigma_X \right] ds \\
&= \theta_X' A_X \theta_X + \mathrm{tr}\left[(Q_X^{-1}\Sigma_X)' \lim_{t\to\infty} \int_0^t e^{-(t-s)L_X} Q_X' A_X Q_X e^{-(t-s)L_X} ds \, Q_X^{-1} \Sigma_X \right] \\
&= \theta_X' A_X \theta_X + \mathrm{tr}\left[(Q_X^{-1}\Sigma_X)' M^X Q_X^{-1} \Sigma_X \right]
\end{aligned}$$

同様にして，

$$\lim_{t\to\infty} \mathrm{E}[Y_t] = \theta_Y,$$
$$\lim_{t\to\infty} \mathrm{E}[X_t' A_{XY} Y_t] = \theta_X' A_{XY} \theta_Y, \quad \lim_{t\to\infty} \mathrm{E}[Y_t' A_Y Y_t] = \theta_Y' A_Y \theta_Y + \mathrm{tr}\left[(Q_Y^{-1}\Sigma_Y)' M^Y Q_Y^{-1} \Sigma_Y \right].$$

以上より，(4.7) 式が導かれる．