

[ 数理研講究録 1351 所収 ]

[Geometric Lévy Process & MEMM]

## 価格理論モデルについて

名古屋市立大学・経済学研究科 宮原 孝夫 (Yoshio Miyahara)

Faculty of Economics, Nagoya City University

平成 15 年 7 月 16 日

### 1 はじめに

本稿の目的は、[Geometric Lévy Process & MEMM] Pricing Model について解説すること及び関連する研究課題を提示することである。

筆者はここ数年、数理ファイナンス理論に関する研究、特に非完備市場の価格理論のための「典型的」な理論モデルを構築することを目指した研究をしてきた。その過程で [Geometric Lévy Process & MEMM] Pricing Model が重要な役割を果たす可能性が高いと考えるに至った。そこで、このモデルとその周辺の研究の現状について報告し、今後の理論的および実証的研究の一助になることを期待している。

### 2 Black-Scholes モデルに代わるモデルの必要性

Black-Scholes モデルとは次のようなものである。安全資産の価格  $B_t$  は  $B_t = e^{rt}$  で与えられ、危険資産の価格過程  $S_t$  は次の確率微分方程式の解として与えられている。

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad S(0) = S_0. \quad (1)$$

ここで  $W_t$  は Wiener 過程 (Brown 運動) であり、 $\mu$  および  $\sigma$  は定数で  $\sigma > 0$  を仮定している。また  $\mathcal{F}_t = \sigma(W_s, s \leq t)$  と仮定する。この方程式の解は

$$S_t = S_0 \exp\left[\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t\right] \quad (2)$$

となり、幾何 Brown 運動である。このとき、同値マルチンゲール測度  $Q$  (すなわち、 $e^{-rt}S_t$  が  $(\mathcal{F}_t, Q)$  マルチンゲール) が一意的に定まり、オプション  $X$  の理論価格は  $E_Q[X]$  により与えられる。

ヨーロッパ型コールオプションの理論価格は次のようになる。権利行使価格が  $K$  であるヨーロッパ型コールオプションを  $C_K$  とおくと、

$$C_K = \max\{S(T) - K, 0\} \quad (3)$$

である。したがって、 $C_K$  の現時点での理論価格  $E_Q[e^{-rT}C_K]$  は

$$E_Q[e^{-rT}C_K] = e^{-rT} \int_{x_0}^{\infty} (S_0 \exp[(r - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma x] - K) \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \exp[-\frac{x^2}{2T}] dx \quad (4)$$

により定まる。ここで  $x_0$  は  $S_0 \exp[(r - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma x_0] - K = 0$  となる値である。

この積分は標準正規分布の分布関数  $\Phi(x)$  を使って次のように表せる。

$$E_Q[e^{-rT}C_K] = S_0\Phi(d_1) - e^{-rT}K\Phi(d_2). \quad (5)$$

ここで

$$d_1 = \frac{\log \frac{S_0}{K} + (r + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad d_2 = \frac{\log \frac{S_0}{K} + (r - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T} \quad (6)$$

である。この公式は Black-Scholes の公式と呼ばれる。

数理ファイナンスおよび金融工学の分野で Black-Scholes モデルは中心的役割を果たしてきた。しかしながら、研究の進展に伴いこのモデルだけでは不十分であることがいくつか指摘されている。その主なものは、次の3点である。

- 1) Black-Scholes モデルは完備市場のモデルであるが、現実には非完備市場が一般的であると考えられており、それに対応したモデルが求められている。
- 2) Black-Scholes モデルに基づく場合には、株価 (危険資産の価格) の log return の分布が正規分布である。現実には非対称性や長い裾の存在が見受けられるのが一般的と考えられている。

3) historical volatility と implied volatility との間の乖離がある。すなわち、株価のデータから定まる標準偏差 (historical volatility) と、オプションの市場価格から公式を逆算して求まる理論的な株価の標準偏差 (implied volatility) との間に乖離が生じている。

上のような指摘に従えば、Black-Scholes モデルは必ずしも現実を十分に反映したものではないことになる。そこで、指摘されているこれらの問題点を解決しうるモデルを構築することが求められる。すなわち次のような性質を持ったモデルが必要である。

- 1) 非完備市場モデルであること。
- 2) log return の分布が非対称性や長い裾をもつような確率過程のクラスであること。
- 3) そのモデルに基づくヨーロッパ型コールオプションの理論価格に関して、その理論価格から導かれる implied volatility (すなわち、Black-Scholes の公式から逆算して得られる volatility) がいわゆる volatility smile property を説明できるクラスであること。

これらの性質を持つモデルの候補を考察してみよう。

非完備市場においては同値マルチンゲール測度は一意的には定まらない。したがって、非完備市場におけるオプションの価格理論モデルの構築はつぎの (A) (B) を行うことにより達せられる。

- (A) 原資産の価格過程を与えること (非完備市場を実現するもの)。
- (B) オプション価格を定めるルールを与えること。

このことを考慮しつつ、非完備市場モデルの候補について検討してみる。

- 1) 非完備市場モデルであるための十分条件の一つは、株価過程がジャンプを含んでいることである。そこから、Black-Scholes モデルにおける Brownian motion の項を Lévy 過程で置きなおしたモデルを導入することが考えられる。これは幾何 Lévy 過程である。
- 2) 幾何 Lévy 過程のクラスは広く、この価格過程の log return の分布が非対称性と長い裾を持っているものを多く含んでいる。

このことより、上の (A) の価格過程として幾何 Lévy 過程がひとつの候補である。われわれはこれを採用することにする。

ついで (B) の手順を考える。他の考え方もあるが、同値マルチンゲール測度による方法を踏襲することにする。この場合、同値マルチンゲール測度はひとつではないのでどのマルチンゲール測度を採用すべきかが問題となる。

候補としては、MMM(minimal martingale measure, [9], [24]), ESS(Esscher martingale transform, [4], [11], [13]), MEMM(minimal entropy martingale measure, [17], [18], [19], [10]), utility martingale measure ([12]) などがある。どれがベストであるかは一概に言えないが、筆者は MEMM が多くの優れた性質を持っていると考えており、幾何 Lévy 過程と MEMM をセットにした [Geometric Lévy Process & MEMM] Pricing Model を非完備市場のオプション価格理論のための典型的モデルとして提唱している ([19], [20])。

### 3 [Geometric Lévy Process & MEMM] Pricing Model とその周辺

[Geometric Lévy Process & MEMM] Pricing Model とは、非完備市場モデルとして前節で説明した (A)(B) に当たるものとして

(A) 原資産の価格過程として幾何レヴィ過程を採用する。

(B) 同値マルチンゲール測度として MEMM を採用し、オプションの価格は MEMM についての期待値として定まるとする。

を採用したモデルである。(このモデルは [19] で導入されている。また [20] に解説がある。)

理論モデルが優れたモデルであるか否かを判断する尺度は次の二つであろう。一つは理論的にしっかりとした枠組みを持っていること、そして二つ目には現実のデータと適合していること。

われわれのモデルに即して見ると、はじめの問題について一番重要な問題は MEMM の存在とその形の決定の問題である。これについては、[19], [10]などで、基本的には解決していると言える。金融工学への応用という立場からは、オプションに対するヘッジングポートフォリオの構成、各種のオプションの価格の計算法の確立などの問題がある。これらについての研究は現在進行中である。

二つめの問題は、いわゆる calibration の問題であるといえる。これについては現在検討がされつつあるがまだ初期の段階であると言えよう。この問題については次節で述べる。

## 4 幾何 Lévy 過程に基づくオプション価格モデルの Calibration Problems

calibration とは、理論モデルがそのモデルにより説明しようとしている現実を適切に表現したものであるか否かを判断しようとするものである。すなわち理論モデルから定まる理論値とそれに対応している現実のデータとを比較して、その適合性を判定することである。その場合にわれわれが利用できる現実のデータとは、株価の時系列データとオプションの市場価格の時系列データである。

われわれは原資産の価格過程を幾何レヴィ過程とすることを前提にしており、この前提の下では calibration の問題は次のことを検討する問題になる。

( A ' ) 原資産の価格過程の幾何レヴィ過程としてなにを採用するか？

( B ' ) いかなる同値マルチンゲール測度を採用するか？

上の ( A ' ) に関しては、現実の株価の時系列データからの判断が必要となる。データから log return の分布の型を推察し、いろいろなレヴィ過程の増分の分布と比較検討することが必要である。候補とされるものには、古くから注目されていたものとして、安定過程がある ([8], [15])。それに続いては、ブラウン運動にジャンプが加わったものがある ([16])。その後には、Variance Gamma 過程 ([14])、CGMY 過程 ([5])、generalized hyperbolic 過程 ([7])、normal inverse Gaussian 過程 ([2]) などが候補に挙げられている。

レヴィ過程の中で採用する分布のクラスが決まったとして、次に問題になることは、そのクラスの中でパラメータを決めて、原資産の価格過程を特定すること、すなわちレヴィ過程のパラメータの推定である。これについては古くからの研究があり現在も続いている。

次に、( B ' ) として挙げた問題を見よう。採用すべき同値マルチンゲール測度の候補としては次のようなものが提案されている。

( 1 ) MMM を採用する。 ([9], [24])

( 2 ) 平均を修正して導かれるマルチンゲール測度を採用する。

( 3 ) Esscher 変換により導かれるマルチンゲール測度を採用する。 ([11], [4], [13])

( 4 ) MEMM を採用する。 ([17], [19], [10])

( 5 ) 効用関数から導かれるマルチンゲール測度を採用する。 ([12])

どのマルチンゲール測度にもそれを採用することの理由付けや利点があるが、注意すべきことは、それが適用可能であるような幾何レヴィ過程のクラスが限定されること、すなわち、そのマルチンゲール測度の存在が保障されるクラスが限定されていることである。特に(2)のものは、これを使える場合はガウス過程の部分がある場合でしかも強い可積分性の条件が満たされる場合に限られる。(4)のMEMMが一番広い範囲のクラスに対して適用可能である。

採用すべき同値マルチンゲール測度を決定すれば、(A')において採用を決めたレヴィ過程と組み合わせることによりオプション価格の理論モデルが一つ定まったことになる。理論モデルが出来た上でなすべきことの第一は、そのモデルがモデルとして持つことを期待されている性質(たとえば volatility smile property など)を持っているかを検証することである。これはシミュレーションによりなされるべき課題であり、calibrationの第一の段階であるといえよう。

これに続いてなすべきことは、その理論モデルから導かれるオプションの理論価格と市場におけるオプションの実際の価格との比較により、その理論モデルの妥当性を判断する問題である。これが calibrationの中心的な課題である。

この課題に対するアプローチは、たとえば [1], [6] 等の仕事があるが、まだ明確な成果が得られているとは言えない段階であり今後の成果が期待される研究課題だと言える。[21] もその一つの試みである。

## 参考文献

- [1] Avellaneda, M.(1998), "Minimum entropy calibration of asset pricing models," *International Journal of Theoretical and Applied Finance* 1(4), 447-472.
- [2] Barndorff-Nielsen, O.E.(1998), "Processes of normal inverse Gaussian type," *Finance and Stochastics*, 2, 41-68.
- [3] Black, F., and Scholes M.(1973): "The Pricing of Options and corporate liabilities," *J. of Political Economy*, 81, 637-654.
- [4] Bühlmann, H., Delbaen, F., Embrechts, P., and Shiryaev, A. N. (1996), "No-arbitrage, Change of Measure and Conditional Esscher Transforms," *CWI Quarterly* 9, No. 4, 291-317.
- [5] Carr, P., Geman, H., Madan, D.B., and Yor, M. (2002), The Fine Structure of Asset Returns: An Empirical Investigation. *Journal of Business* 75, 305-332.

- [6] Cont, R. and Tankov, P.(2002), “Calibration of jump-diffusion option-pricing models:a robust non-parametric approach,” (preprint).
- [7] Eberlein, E. and Keller, U. (1995), “Hyperbolic distributions in finance,” *Bernoulli* 1, 281-299.
- [8] Fama, E. F. (1963), “Mandelbrot and the Stable Paretian Hypothesis,” *J. of Business* 36, 420-429.
- [9] Föllmer, H. and Schweizer, M. (1991), “Hedging of Contingent Claims under Incomplete Information,” in M.H.A. Davis and R.J. Elliot (ed.) :*Applied Stochastic Analysis*, Gordon and Breach, 389-414.
- [10] Fujiwara, T. and Miyahara, Y. (2003), “The Minimal Entropy Martingale Measures for Geometric Lévy Processes,” *Finance and Stochastics* 7(2003), pp.509-531.
- [11] Gerber, H. U. and Shiu, E. S. W. (1994), “Option Pricing by Esscher Transforms,” *Transactions of the Society of Actuaries* XLVI, 99-191.
- [12] Kallsen, J.(2002), “Utility-Based Derivative Pricing in Incomplete Markets,” in *Mathematical Finance - Bachelier Congress 2000*, Springer, 313-338.
- [13] Kallsen, J. and Shiryaev, A.N.(2002), “The Cumulant Process and Esscher’s Change of Measure,” *Finance and Stochastics*, Vol.6, No.4, 397-428.
- [14] Madan, D. and Seneta, E. (1990), The variance gamma (VG) model for share market returns. *Journal of Business*, v.63(4), 511-524.
- [15] Mandelbrot, B. (1963), ‘The variation of certain speculative prices’, *J. of Business*, 36, 394-419.
- [16] Merton, R. C.(1976), “Option Pricing when Underlying Stock Returns are Discontinuous,” *J. of Financial Economics*, 3, 125-144.
- [17] Miyahara, Y.(1996), “ Canonical Martingale Measures of Incomplete Assets Markets,” in “ *Probability Theory and Mathematical Statistics: Proceedings of the Seventh Japan-Russia Symposium, Tokyo 1995 (eds. S. Watanabe et al)*,” pp.343-352.
- [18] Miyahara, Y.(1999), “ Minimal Entropy Martingale Measures of Jump Type Price Processes in Incomplete Assets Markets,” *Asian-Pacific Financial Markets*, Vol. 6, No. 2, pp. 97-113.
- [19] Miyahara, Y.(2001), “[Geometric Lévy Process & MEMM] Pricing Model and Related Estimation Problems,” *Asia-Pacific Financial Markets* 8, No. 1, pp. 45-60.
- [20] 宮原 孝夫 (2003) 「株価モデルとレヴィ過程」朝倉書店
- [21] Miyahara, Y.(2003), “Calibration Problems for Geometric Lévy Process Pricing Models,” (in preparation).

- [22] Overhaus, M., Ferraris, A., Knudsen, T., Milward, R., Nguyen-Ngoc, L. and Schindlmayr, G. (2002), *Equity derivatives: Theory and Applications*, Wiley.
- [23] Schoutens, W, (2003), *Lévy Processes in Finance: Pricing Financial Derivatives*, Wiley.
- [24] Schweizer, M.(1995), On the Minimal Martingale measure and the Föllmer-Schweizer Decomposition. *Stochastic Analysis and Applications*, 13(5), 573-599.
- [25] Shiryaev, A. N.(1999), *Essentials of Stochastic Finance: Facts, Models, Theory*, World Scientific.