CRR DISCUSSION PAPER SERIES J

Discussion Paper No. J-42

相似拡大的頑健効用と 2 ファクター金利モデルに基づく生命保険の多期間最適運用問題に対する近似解析解

楠田 浩二

2013 年 8 月

Center for Risk Research
Faculty of Economics
SHIGA UNIVERSITY

1-1-1 BANBA, HIKONE,
SHIGA 522-8522, JAPAN

滋賀大学経済学部附属リスク研究センター
〒522-8522 滋賀県彦根市馬場 1-1-1

CRR DISCUSSION PAPER SERIES J

Discussion Paper No. J-42

相似拡大的頑健効用と2ファクター金利モデルに基づく生命保険の多期間最適運用問題に対する近似解析解

楠田　浩二[1]

2013年8月

Center for Risk Research
Faculty of Economics
SHIGA UNIVERSITY
1-1-1 BANBA, HIKONE,
SHIGA 522-8522, JAPAN

滋賀大学経済学部附属リスク研究センター
〒522-8522 滋賀県彦根市馬場1-1-1

キーワード: 確率制御、近似解析解、金利リスク、生命保険、相似拡大的頑健効用、2ファクター・モデル、ナイトの不確実性、ポートフォリオ最適化

JEL 分類番号: C62、D14、G11

概 要

ナイトの不確実性下の消費と証券投資（株式指数と全満期の国債）の多期間最適化問題に対し、楠田 (2013) は「相似拡大的頑健効用」（Maenhout (2004)）と金利の2ファクター・アフィン・モデルを仮定し、株式指数と2国債群の最適投資比率の近似解析解を確率制御により導出している。本稿では、各期の利益と役職員給与に基づく相似拡大的頑健効用を所持する生命保険会社が生命保険を株式指数と全満期の国債で運用する効用最大化問題を考察する。生命保険を「証券」に見立て、生命保険会社の生命保険債務を「生命保険証券」の空売り投資と見做し、ポートフォリオに組み込むという新たな接近法を用いることによって、本問題を楠田 (2013) の枠組みの中に位置付けられることを示す。而して、本モデルから導かれる諸命題を検証可能命題とすべく、実証分析を可能とする近似解析解を導出する。

[1] 本稿は滋賀大学経済学部附属リスク研究センター東アジア保険プロジェクトにおける中国東北財経大学金融学院との共同研究の成果の一部である。尚、本研究の過程では、リスク研究センター長・久保英也教授に多大且つ有益な御指摘と愛情溢れる御鞭撻を賜った。ここに特筆して厚く感謝申し上げる。

1　序論

今般の世界金融危機では、欧米の金融機関がサブプライム・ローンを原資とする証券化商品等の価格下落確率を過少評価し過大な投資を行っていたことが指摘されている。一方、我が国の金融機関は同時期にかかる証券化商品への投資を殆ど行っていない。彼我の投資行動の差異は彼我の主観確率の差異、或いは相対的危険回避度の差異に起因するというのが従来の「ナイトの不確実性」(Knight (1921)) を無視した経済学的解釈であった。しかし、エクイティ・プレミアム・パズル、ポートフォリオ・パズル等の従来モデルでは解釈出来ない様々な現象が指摘されている中、ナイトの不確実性を考慮した解析的に取り扱い易い効用（「頑健効用」（Anderson, Hansen, and Sargent (2003))、「相似拡大的頑健効用」(Maenhoout (2004) 等）が提案されていることもあって、これらのパズルをナイトの不確実性を考慮して解明する動きがみられるようになっている。ここでの彼我の金融機関の投資行動の差異も、ナイトの不確実性を考慮すれば、彼我の主観確率・相対的危険回避度の差異に加え、彼我の「曖昧性回避度」の差異に起因するという解釈が可能となる。

楠田 (2013) は、ナイトの不確実性下、相似拡大的頑健効用を所持する投資家が株式指数と全満期の国債を投資対象とする多期間最適化問題に対し、短期金利と平均短期金利を状態変数とする 2 ファクター・アフィン・モデルを仮定して確率制御により最適投資比率等の近似解析解を導出している。その結果、2 ファクター・モデルは 3 資産の最適投資を決定出来るという理論的帰結通り、国債株式指数と全満期の国債の最適投資比率密度の満たす条件が 2 式導かれ、株式指数と 2 国債群の最適投資比率が決定されている。しかし、同近似解析解では、値関数を構成する短期金利と平均短期金利の 2 変数関数の 7 係数は 7 元連立非線形方程式の数値解として陰伏的にしか与えられてない。このため、当該最適投資比率を用いて投資家の相対的危険回避度と「相対的曖昧性回避度」を推定するなどの実証分析は困難になる。そこで、楠田 (2013) は金利モデルの係数間等に妥当と判断される制約を仮定し、上記数値解法負担が 1 変数方程式の数値解導出にまで軽減され、上記推定等の実証分析を容易にする、近似解析解を導いている。

本稿では、ナイトの不確実性下、各期の経常利益（内部留保除く）と役職員給与に基づく相似拡大的効用を所持する生命保険会社が生命保険を運用する効用最大化問題を考察する。生命保険を特殊な「証券」に見立て、生命保険会社の生命保険債務を「生命保険証券」の空売り投資と見做し、生命保険会社のポートフォリオに組み込むという新たな接近法を用いることによって、本問題を楠田 (2013) の枠組みの中に位置付けられることを示す。而して、本モデルから導かれる諸命題を検証可能命題とすべく、実証分析を可能とする近似解析解を導出する。

本稿の次章以降の構成は次の通りである。2 章では、2 ファクター・アフィン・モデル等の市場環境と生命保険会社の生命保険最適運用問題を説明し、

生命保険販売を生命保険空売り投資と見做し、ポートフォリオに組み込む新たな接近法を提示する。3 章では、相似拡大的頑健効用を紹介し、相似拡大的頑健効用下の生命保険会社の最適運用問題の近似解析解を導出する。4 章では、金利モデルの係数間等の制約を仮定し、数値解法負担が低く、実証分析が容易な近似解析解を導出する。

2　市場環境と生命保険会社の最適運用問題

本章では、金利の 2 ファクター・本質的アフィン・モデル等の市場環境を説明した後、生命保険会社の生命保険販売を生命保険の空売り投資と見做し、生命保険債務を生命保険会社のポートフォリオに組み込むという新たな接近法により、本問題を楠田（2013）の枠組みの中に位置付けられることを示す。

2.1　市場環境

無限連続時間の摩擦の無い証券市場経済を考察する。投資家共通の尤も有り得べき確率測度と情報構造は完備フィルター付き確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$ によりモデル化されている。ここで、$\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,\infty)}$ は 2 次元標準ブラウン運動 z によって生成される自然なフィルター付けである。確率測度 P の下での期待作用素を E と表記する。

株式指数と額面 1 円の割引国債が任意の時点で市場で取引されている。割引国債は任意の時点で発行されており、発行時点の満期までの期間は $(0, \bar{\tau}]$ の任意の期間である。株価指数の価格を S、満期 T の割引国債の価格を B^T と表記する。

金利のイールド・カーブの変動については、主成分分析から、長短金利の平行移動 (parallel shift)、捩れ (twist)、歪み (curvature) の 3 成分で 99%以上が説明できるとされている。特に、平行移動成分が 80～90%、これに捩れ成分を加えると、90～95%の説明力を持つとされている。そこで、代表的な金利派生商品評価モデルである「2 ファクター・ハル・ホワイト・モデル」(Hull and White (1994)) を仮定する。

仮定 1. 瞬間的スポット・レート r は次の確率過程に従う。

$$
\begin{aligned}
dr_t &= \kappa(\bar{r}_t - r_t)\,dt - \sigma\,dz_{1t} &\quad (2.1)\\
d\bar{r}_t &= \bar{\kappa}(\bar{r} - \bar{r}_t)\,dt - \sum_{i=1}^{2} \bar{\rho}_i\,\bar{\sigma}\,dz_{it} &\quad (2.2)
\end{aligned}
$$

ここで、κ は瞬間的スポット・レートの平均金利過程 $\bar{r}_t$ への回帰速度、σ は拡散係数、$\bar{\kappa}$ は平均金利過程の平均金利 $\bar{r}$ への回帰速度、$\bar{\sigma}$ は拡散係数をそれぞれ表す正の定数である。また、$\bar{\rho}_1, \bar{\rho}_2 \in [-1, 1]$ で、$\bar{\rho}_1$ は金利変化 dr_t と平均金利変化 $d\bar{r}_t$ の相関を表しており、$\bar{\rho}_1^2 + \bar{\rho}_2^2 = 1$ を満たしている。

以下では、瞬間的スポット・レート r_t を「短期金利」、平均金利過程 br_t を「平均短期金利」、平均金利 $\bar{r}$ を「長期平均短期金利」と呼ぶ。

上記モデルは、状態変数 $(r_t, \bar{r}_t)$ の「アフィン・モデル」（Duffie and Kan (1996)）に包含される。リスクの市場価格については、定数と仮定されたモデルは「完備アフィン・モデル（completely affine models）」、状態変数のアフィン関数と仮定されたモデルは「本質的アフィン・モデル（essentially affine models）」とそれぞれ呼ばれている（Duffee (2004)）。本稿では、「本質的アフィン・モデル」を仮定することから出発する。また、株式指数の収益率のボラティリティは一定と仮定する。

仮定 2. *1.* リスクの市場価格 λ は短期金利と平均短期金利のアフィン関数である。

$$\lambda_{it} = \lambda_i + \lambda_{i1} r_t + \lambda_{i2} \bar{r}_t \qquad i = 1, 2 \tag{2.3}$$

ここで、$\lambda_i, \lambda_{i1}, \lambda_{i2}$ は定数である。

2. 株式指数の収益率のボラティリティは v である。ここで、v は正の定数である。

補題 1. 仮定 *1*・*2* の下、株式指数 S と満期 T の割引国債の無裁定価格 B^T は次の確率微分方程式に従う。

$$\frac{dS_t}{S_t} = \left(r_t + \sum_{i=1}^{2} \rho_i v \lambda_{it} \right) dt + \sum_{i=1}^{2} \rho_i v \, dz_{it} \tag{2.4}$$

$$\frac{dB_t^T}{B_t^T} = \left(r_t + \sum_{i=1}^{2} \sigma_i(\tau) \lambda_{it} \right) dt + \sum_{i=1}^{2} \sigma_i(\tau) \, dz_{it} \tag{2.5}$$

ここで、$\rho_1, \rho_2 \in [-1, 1]$ で、ρ_1 は短期金利変化 dr_t と株式指数 S_t の収益率の相関を表しており、$\rho_1^2 + \rho_2^2 = 1$ を満たしている。$\tau = T - t$ で、

$$\begin{pmatrix} \sigma_1(\tau) \\ \sigma_2(\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma & \bar{\rho}_1 \bar{\sigma} \\ 0 & \bar{\rho}_2 \bar{\sigma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \end{pmatrix} \tag{2.6}$$

ここで、(b_1, b_2) は次の非斉次の定数係数線形連立常微分方程式の境界値問題の解析解である。

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa + \sigma \lambda_{11} & \bar{\sigma} \sum_{i=1}^{2} \bar{\rho}_i \lambda_{i1} \\ -\kappa & \bar{\kappa} + \bar{\sigma} \sum_{i=1}^{2} \bar{\rho}_i \lambda_{i2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.7}$$

境界条件：$b_1(T) = b_2(T) = 0$

証明. 補論 A.1 参照。 □

以下では、$v_i = \rho_i v$ と略記する。

2.2 生命保険会社の生命保険最適運用問題

生命保険会社は一般に死亡保険、生存保険、生死混合保険、医療保険等の生命保険を販売している。我が国では、医療保険等の積立金額・運用残高は小さい。そこで、生命保険会社の生命保険運用問題を考察する本稿では、死亡保険、生存保険、生死混合保険の 3 種の生命保険を対象とすれば十分である。また、生死混合保険は死亡保険と生存保険の混合保険なので、畢竟、生命保険会社のこれら 3 種の生命保険の販売に基づく保険料収入と解約返戻金・保険金等債務は生死混合保険で代表される。そこで本稿では、生死混合保険の代表的商品である養老保険を対象とする。尚、生死混合保険における死亡保険部分は積立金額・運用残高は小さいので、本稿の生命保険会社の運用モデル構築に際しては、生死混合保険における生存保険部分を中心に抽象化作業を行うことを予め留意されたい。

今、相互会社形態の生命保険会社が一定年齢を満期とする契約期間 $\bar{\tau}$ 年、満期保険金が一口 1 円の一時払い養老保険を販売している。当該養老保険の予定利率、解約時の解約返戻金、死亡時の保険金については、次の仮定を置く。

仮定 3. *1.* 生命保険会社は当該養老保険の保険料を予定利率（連続複利ベース）が満期までの期間 $\bar{\tau}$ の国債の利率から一定率 ι'（同）引き下げた利率となるように設定して販売している。すなわち、時点 t における当該養老保険の保険料は一口 $e^{\iota'\bar{\tau}}B_t^{t+\bar{\tau}}$ 円に設定されている。

2. 契約者が時点 t で満期までの期間 τ の養老保険を解約した場合、一口当り $e^{\iota'\tau}B_t^{t+\tau}$ 円の解約返戻金が支払われる。

3. 被保険者が時点 t に満期までの期間 τ を残して死亡した場合は、受取人に満期保険金（一口当り *1* 円）が支払われる。

被保険者が時点 t に満期までの期間 τ を残して死亡した場合に受取人に支払われる一口当りの満期保険金 1 円は養老保険における生存保険金（解約）価値 $e^{\iota'\tau}B_t^{t+\tau}$ 円と死亡保険金価値 $(1 - e^{\iota'\tau}B_t^{t+\tau})$ 円の合計金額と解釈出来る。先ず、後者の死亡保険金支払いを除いた養老保険を考察する。このとき、生命保険会社は満期までの期間 τ の養老保険の各時点 t における販売と解約返戻金・保険金支払いを通じて市場価値

$$L_t^{t+\tau} := e^{\iota'\tau}B_t^{t+\tau} \tag{2.8}$$

円の証券を売買していると見做せる。すなわち、生命保険会社の当該養老保険販売は一口当り $e^{\iota'\bar{\tau}}B_t^{t+\bar{\tau}}$ 円の当該証券を空売りしており、当該養老保険解約時返戻金・死亡時保険金 $e^{\iota'\tau}B_t^{t+\tau}$ の支払いは当該証券の市場価値での買戻しと見做せる。そこで以下では、当該養老保険を当該生命保険会社のみが空売り出来、契約者・受取人のみが当該生命保険会社に解約時・死亡時に随時買戻しを請求出来る特殊な店頭売買証券に見立てる。このとき、満期 T の生

命保険証券の市場価格 L^T について、(2.8) 式を微分し、(2.5) 式を用いると、次の確率微分方程式が得られる。

$$\frac{dL_t^T}{L_t^T} = \left(r_t + \sum_{i=1}^{2} \sigma_i(\tau)\lambda_{it} - \iota' \right) dt + \sum_{i=1}^{2} \sigma_i(\tau)\, dz_{it} \tag{2.9}$$

当該養老保険を証券に見立てると、生命保険会社は当該養老保険の販売と解約返戻金・保険金支払いを通じて、満期までの期間 $[0, \bar{\tau}]$ の養老保険証券群の空売りポートフォリオを組成していると見做せる。

満期までの期間 $[\tau, \tau + d\tau]$ の養老保険の時点 t における富 W_t に対する保険債務比率（空売り投資比率）を $\psi_t(\tau)d\tau$ と表記する。すなわち、$\psi_t(\tau)$ は保険債務比率密度過程を表している。保険債務比率密度過程は、分母の富の成長率、分子の保険債務残高を減少させる死亡率と解約率に依存する。富の成長率に関する項と死亡率に関する項は時刻と満期までの期間の 2 変数関数と仮定する。解約率に関する項は、解約率が高金利時に満期までの期間が長いほど高まる、と考えられることから、短期金利と平均短期金利の乖離に時刻と満期までの期間の 2 変数関数を乗じたものと仮定する。

仮定 4. 保険債務比率密度過程 $\psi_t(\tau)$ は次式に従う。

$$\psi_t(\tau) = \psi_1(t, \tau) + \psi_2(t, \tau)(r_t - \bar{r}_t) \tag{2.10}$$

ここで、$\psi_1(t, \cdot), \psi_2(t, \cdot)$ は区間 $[0, \bar{\tau}]$ における可積分関数である。

各期 $[t, t + dt]$ における満期までの期間 $[\tau, \tau + d\tau]$ の死亡保険金支払い総額を考察するため、当該死亡保険金の契約口数を $\zeta_t(\tau)d\tau dt$ と表記する。被保険者の死亡率は一般に年齢の増加関数とされているので、満期までの期間の或る減少関数 $\varepsilon_1(\tau)$ で表されると仮定する。このとき、各期 $[t, t+dt]$ における満期までの期間 $[\tau, \tau + d\tau]$ の死亡保険金支払い総額は $\varepsilon_1(\tau)\zeta_t(\tau)(1 - B_t^{t+\tau})d\tau dt$ と表される。これは次のように書き換えられる。

$$\varepsilon_1(\tau)\zeta_t(\tau)(1 - B_t^{t+\tau})d\tau dt = \varepsilon_1(\tau) \left(\frac{1}{B_t^{t+\tau}} - 1 \right) \psi(t, \tau) W_t d\tau dt$$

上式右辺の $(1/B_t^{t+\tau} - 1)$ は短期金利と平均短期金利の関数であり、且つ満期までの期間の増加関数である。死亡保険の積立金額・運用残高は生存保険に比べて著しく小さく、積立金額・運用残高全体に対する占率が著しく小さいことを考慮し、短期金利と平均短期金利の変動を無視するほか、満期までの期間 τ の影響については、τ の増加関数 $\varepsilon_1(\tau)$ の影響と相殺すると見做し、次式が成り立っていると仮定する。

$$\varepsilon' = \varepsilon_1(\tau) \left(\frac{1}{B_t^{t+\tau}} - 1 \right)$$

ここで、ε' は正の定数である

また、保険の販売、積立金の運用・管理等に係る役職員給与を除く諸経費は運用残高に比例すると仮定する。以上の考察より、次の仮定を設ける。

仮定 5. *1.* 各期 $[t, t+dt]$ における満期までの期間 $[\tau, \tau+d\tau]$ の死亡保険金（生存保険価値除く）の支払い総額は $\varepsilon' \psi(t,\tau) W_t d\tau dt$ である。

2. 各期 $[t, t+dt]$ における満期までの期間 $[\tau, \tau+d\tau]$ の保険積立金の運用・管理等に係る役職員給与を除く経費は $\varepsilon'' \psi(t,\tau) W_t d\tau dt$ である。ここで、ε'' は正の定数。

以下では、富に対する全保険債務比率密度を Ψ_t とそれぞれ略記する。すなわち、

$$\Psi_t = \frac{1}{\bar{\tau}} \int_0^{\bar{\tau}} \psi_t(\tau)\, d\tau \tag{2.11}$$

仮定 4 の下、Ψ_t は次式を満たしている。

$$\Psi_t = \Psi_1 + \Psi_2 (r_t - \bar{r}_t) \tag{2.12}$$

ここで、

$$\Psi_i = \frac{1}{\bar{\tau}} \int_0^{\bar{\tau}} \psi_i(\tau)\, d\tau \qquad i = 1, 2 \tag{2.13}$$

生命保険会社の効用汎関数の変数については、次の仮定を置く。

仮定 6. 生命保険会社は各期 $[t, t+dt]$ の経常利益（内部留保除く）と役職員給与の合計金額 $c_t dt$ に基づく効用汎関数 $u(c)$ を所持している。

留意点 1. 相互会社である生命保険会社においては、内部留保を除く経常利益は基本的に社員（契約者）配当金である。従って、上記経常利益（内部留保除く）と役職員給与の合計金額は当該生命保険会社の主要利害関係者への報酬を表していると解釈出来る。そこで以下では、c_t を「主要利害関係者報酬」と呼ぶ。効用汎関数の特定化は次章で行う。

当該生命保険会社は、生命保険債務比率密度過程 $\psi_t(\tau)$、初期時点の短期金利 r_0 と平均短期金利 $\bar{r}_0$ を所与として与えられた富 W_0 を株式指数と全満期の国債を対象に投資しながら当該効用汎関数を最大化する問題を解く。通常は富に対する証券の投資比率を最適化するが、本稿では、任意の満期の国債を投資対象としているため富に対する国債投資比率密度過程 $\varphi_t(\tau)$ を最適化する。ここで、τ は国債の満期までの期間を表している。尚、或る特定の満期の国債の投資比率自体を非零とする投資を認めるため、許容される関数 $\varphi_t(\tau)$ の空間は超関数を含む関数空間とする。また、以下では、全国債への投資比率を Φ と表記する。すなわち、

$$\Phi_t = \frac{1}{\bar{\tau}} \int_0^{\bar{\tau}} \varphi_t(\tau)\, d\tau \tag{2.14}$$

このとき、株式指数への投資比率は $1 - \Phi_t + \Psi_t$ で表されることに留意したい。

以上より、生命保険会社の予算制約式が導かれる。

補題 2. 生命保険債務比率密度過程 ψ、国債の投資比率密度過程 φ と主要利害関係者報酬過程 c を所与とする。このとき、仮定 *1-6* の下、富過程 W は次の予算制約式を満たす。

$$dW_t = \left\{ \left(r_t + \iota\Psi_t + \sum_{i=1}^{2} \Pi_{it}\lambda_{it} \right) W_t - c_t \right\} dt + \sum_{i=1}^{2} \Pi_{it} W_t \, dz_{it} \tag{2.15}$$

ここで、$\iota = \iota' - \varepsilon' - \varepsilon''$、

$$\Pi_{it} = \frac{1}{\bar{\tau}} \int_0^{\bar{\tau}} \Big(\varphi_t(\tau) - \psi_t(\tau) \Big) \sigma_i(\tau) \, d\tau + (1 - \Phi_t + \Psi_t) v_i \qquad i = 1, 2 \tag{2.16}$$

証明. 補論 A.2 参照。 □

予算制約式 (2.15) を満たす主要利害関係者報酬・投資比率過程 (c, φ) を初期状態 $Y_0 = (W_0, r_0, \bar{r}_0)$ に対する許容的制御と呼び、許容的制御の集合を $\mathcal{C}(Y_0)$ と表記する。このとき、最適投資問題は次式で定義される値関数 $V(Y_0)$ の解析解を求める問題となる。

$$V(Y_0) = \sup_{(c,\varphi) \in \mathcal{C}(Y_0)} u(c) \tag{2.17}$$

3 相似拡大的頑健効用に基づく生命保険の最適運用問題の近似解析解

本章では、頑健効用と同効用下の本問題に対する確率制御の解法を紹介した後、楠田 (2013) の確率制御による解法に沿って相似拡大的頑健効用に基づく生命保険の最適運用問題に対する近似解析解を導出する。

3.1 頑健効用と生命保険の最適運用問題の確率制御

ナイトの不確実性下、「頑健効用」(Anderson, Hansen, and Sargent (2003))を所持する投資家は現実の確率測度として P を尤も有り得べき確率測度(以下、「参考確率測度」、或いは「参考確率」と呼ぶ)と認識しているが、参考確率測度 P 以外の確率測度である可能性を否定出来ない。そこで、彼女或いは彼は参考確率 P 以外の確率測度の候補として、全ての「等価確率測度」[1] の集合 $\mathbb{P}$ を想定する。そして、彼女或いは彼は各消費計画に対し最悪の場合の等価確率測度を想定して、$\mathbb{P}$ 上で「期待効用汎関数」を最小化する等価確

[1] $\tilde{P}$ が P の等価確率測度とは、両測度の零集合が一致している場合、すなわち、$P(A) = 0 \Leftrightarrow \tilde{P}(A) = 0$ が成立している場合を言う。尚、任意の等価確率測度 P^x は、ギルサノフの定理により、2 乗可積分な或る適合的過程 x により、ラドン・ニコディム微分として、次式のように表現される。

$$\frac{dP^x}{dP} = \exp\left(\int_0^{\infty} x_t dz_t - \frac{1}{2} \int_0^{\infty} x_t^2 dt \right) \tag{3.1}$$

率測度（以下、「最悪確率」と呼ぶ）を求める。この際、参考確率 P を尤も有り得べき確率と認識している以上、参考確率 P と大幅に乖離する最悪確率を想定することは慎重を通り越して杞憂の誹りを免れない。そこで、参考確率 P との乖離に損失を与える、P **に対する等価確率** P^x **の相対エントロピーの割引現在価値**（定義：(3.2) 式）を期待効用汎関数に付加した汎関数を最小化対象とする。

$$\tilde{\mathcal{R}}^x = E^x\left[\beta\int_0^\infty e^{-\beta t}\log\left(\frac{dP^x}{dP}\right)_t dt\right] \tag{3.2}$$

先ず、生命保険会社が次式で表される頑健効用汎関数を所持している場合から考察する。

$$u(c) = \begin{cases} \inf_{P^x\in\mathbb{P}} E^x\left[\int_0^\infty e^{-\beta t}\frac{c_t^{1-\gamma}}{1-\gamma}\,dt\right] + \frac{1}{\theta}\,\tilde{\mathcal{R}}^x & \text{if } \gamma\neq 1 \\ \\ \inf_{P^x\in\mathbb{P}} E^x\left[\int_0^\infty e^{-\beta t}\log c_t\,dt\right] + \frac{1}{\theta}\,\tilde{\mathcal{R}}^x & \text{if } \gamma = 1 \end{cases} \tag{3.3}$$

ここで、β は割引率、γ は相対的危険回避度、θ は「曖昧性の回避度合」（留意点 2 参照）を表す正の定数である。

留意点 2. 係数 $\theta = 0_+$ のとき、第 *2* 項が無限大となるため最小化の結果導出される最悪確率は参考確率 P となり、効用汎関数は相対的危険回避度 γ の *CRRA (Constant Relative Risk Aversion)* 期待効用汎関数となる。θ が増加するにつれて最小化の結果導出される相対エントロピーは大きくなり、参考確率と最悪確率の乖離は増大する。これは、θ が大きくなるにつれて、投資家がより「曖昧性回避的 *(umbiguity averse)*」（*Cheng and Epstein (2002)*）となることを示している。[2] すなわち、θ は曖昧性回避の度合いを示している。また、$\theta = 0_+$ の場合を以下では「曖昧性中立的」な場合と呼ぶ。

3.1.1　曖昧性中立的頑健効用（CRRA 期待効用）下の確率制御

先ず、生命保険会社が頑健効用 (3.3) を所持している場合の本問題 (2.17) の解法を、曖昧性中立的（$\theta = 0_+$）な場合の解法から説き起こす。この場合、本問題 (2.17) は次の通常の Hamilton-Jacobi-Bellman 方程式（以下、「HJB 方程式」）を解く問題に帰着される。

$$\sup_{\varphi}\left[\mathcal{D}^{(c,\varphi)}V(W_t,r_t,\bar{r}_t) - \beta V(W_t,r_t,\bar{r}_t) - \frac{c_t^{1-\gamma}}{1-\gamma}\right] = 0 \tag{3.4}$$

s.t. 横断条件

$$\lim_{T\to\infty} E[\,e^{-\beta T}V(W_T,r_T)\,] = 0 \tag{3.5}$$

[2] 係数 θ が大きくなるにつれて、投資家がより曖昧性回避的となることはジャンプ拡散情報の下でも示されている（例えば、Kusuda (2006) を参照）。

ここで、

$$\mathcal{D}^{(c,\varphi)}V(W_t, r_t, \bar{r}_t) = \left\{ \left(r_t + \iota\Psi_t + \sum_{i=1}^{2} \Pi_{it}\lambda_{it} \right) W_t - c_t \right\} V_W$$
$$+ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2} \Pi_{it}^2 W_t^2 V_{WW} - \Pi_{1t}\sigma\, W_t V_{Wr} - \sum_{i=1}^{2} \Pi_{it}\bar{\rho}_i\bar{\sigma}\, W_t V_{W\bar{r}}$$
$$+ \kappa(\bar{r}_t - r_t)V_r + \bar{\kappa}(\bar{r} - \bar{r}_t)V_{\bar{r}} + \frac{1}{2}\sigma^2 V_{rr} + \frac{1}{2}\bar{\sigma}^2 V_{\bar{r}\bar{r}} + \bar{\rho}_1\sigma\bar{\sigma}V_{r\bar{r}} \quad (3.6)$$

3.1.2 頑健効用下の確率制御

次に、生命保険会社が頑健効用 (3.3) を所持している場合の本問題 (2.17) の解法を示す。Anderson, Hansen, and Sargent (2003) は、頑健効用における最悪確率測度導出が最悪確率測度への測度変換項 $g(Y_t) = (g_1(Y_t), g_2(Y_t))$ を状態変数の確率微分方程式に次のように加えた後、

$$dW_t = \left\{ \left(r_t + \iota\Psi_t + \sum_{i=1}^{2} \Pi_{it}\lambda_{it} \right) W_t - c_t + \sum_{i=1}^{2} \Pi_{it}\, W_t\, g_i(Y_t) \right\} dt + \sum_{i=1}^{2} \Pi_{it} W_t\, dz_{it}$$

$$dr_t = \Big(\kappa\big(\bar{r}_t - r_t\big) - \sigma g_1(Y_t) \Big)\, dt - \sigma\, dz_{1t}$$

$$d\bar{r}_t = \left(\bar{\kappa}\big(\bar{r} - \bar{r}_t\big) - \sum_{i=1}^{2} \bar{\rho}_i\bar{\sigma} g_i(Y_t) \right)\, dt - \sum_{i=1}^{2} \bar{\rho}_i\bar{\sigma}\, dz_{it}$$

次式で表される最小化を行うことと等価であることを示している。

$$\inf_g \Bigg[\mathcal{D}^{(c,\varphi)}V - \beta V + \frac{c^{1-\gamma}}{1-\gamma} + \frac{1}{2\theta}\|g(Y_t)\|^2$$
$$+ \Big(\Pi_{1t}W_tV_W - \sigma V_r - \bar{\rho}_1\bar{\sigma}V_{\bar{r}} \Big) g_1(Y_t) + \Big(\Pi_{2t}W_tV_W - \bar{\rho}_2\bar{\sigma}V_{\bar{r}} \Big) g_2(Y_t) \Bigg]$$

従って、頑健効用における HJB 方程式は次式のように表される。

$$\sup_{(c,\varphi)} \inf_g \Bigg[\mathcal{D}^{(c,\varphi)}V - \beta V + \frac{c^{1-\gamma}}{1-\gamma} + \frac{1}{2\theta}\|g\|^2$$
$$+ \Big(\Pi_{1t}W_tV_W - \sigma V_r - \bar{\rho}_1\bar{\sigma}V_{\bar{r}} \Big) g_1 + \Big(\Pi_{2t}W_tV_W - \bar{\rho}_2\bar{\sigma}V_{\bar{r}} \Big) g_2 \Bigg] = 0 \quad (3.7)$$

s.t. (3.5)

先ず、最小化の 1 階の条件より、最悪確率測度（変換項）が次のように決定される。

$$\begin{pmatrix} g_1^* \\ g_2^* \end{pmatrix} = -\theta \begin{pmatrix} \Pi_{1t}W_tV_W - \sigma V_r - \bar{\rho}_1\bar{\sigma}V_{\bar{r}} \\ \Pi_{2t}W_tV_W - \bar{\rho}_2\bar{\sigma}V_{\bar{r}} \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

最悪確率測度変換項 g^* を HJB 方程式に代入すると、次式を得る。

$$\sup_{(c,\varphi)}\Bigg[\mathcal{D}^{(c,\varphi)}V-\beta V+\frac{c^{1-\gamma}}{1-\gamma}$$
$$-\frac{\theta}{2}\left\{\left(\mathit{\Pi}_{1t}W_tV_W-\sigma V_r-\bar{\rho}_1\bar{\sigma}V_{\bar{r}}\right)^2+\left(\mathit{\Pi}_{2t}W_tV_W-\bar{\rho}_2\bar{\sigma}V_{\bar{r}}\right)^2\right\}\Bigg]=0 \quad (3.9)$$

3.2 相似拡大的頑健効用と生命保険の最適運用問題の確率制御

頑健効用において曖昧性の回避度合を表す θ は一定で状態に独立である。Maenhout (2004) は曖昧性の回避度合を状態変数 $Y_t=(W_t,r_t,\bar{r}_t)$ に依存出来るように $\theta(Y_t)$ に拡張した「一般化頑健効用族」を提示しているが、同効用は効用汎関数が備えるべき望ましい性質とされる「相似拡大性」を一般に有していない。そこで、Maenhout (2004) は $\theta(Y_t)$ を次のように特定化した「相似拡大的頑健効用」を提唱している。

$$\theta(Y_t)=\frac{\delta}{(1-\gamma)V(Y_t)} \quad (3.10)$$

ここで、δ は曖昧性の回避度合を表す正の定数である。

生命保険会社は相似拡大的頑健効用を所持していると仮定する。

仮定 7. 生命保険会社の効用汎関数は *HJB* 方程式 *(3.9)* における θ を *(3.10)* 式で定義される $\theta(Y_t)$ で置き換えた相似拡大的頑健効用である。

このとき、HJB 方程式 (3.9) は次のように書き換えられる。

$$\sup_{(c,\varphi)}\Bigg[\mathcal{D}^{(c,\varphi)}V-\beta V+\frac{c^{1-\gamma}}{1-\gamma}$$
$$-\frac{\delta}{2(1-\gamma)V}\left\{\left(\mathit{\Pi}_{1t}W_tV_W-\sigma V_r-\bar{\rho}_1\bar{\sigma}V_{\bar{r}}\right)^2+\left(\mathit{\Pi}_{2t}W_tV_W-\bar{\rho}_2\bar{\sigma}V_{\bar{r}}\right)^2\right\}\Bigg]=0$$
$$(3.11)$$

HJB 方程式における最大化の 1 階の条件から最適主要利害関係者報酬・投資比率密度 (c^*,φ^*) は次式を満たしている。

$$c_t^*=V_W^{-\frac{1}{\gamma}} \quad (3.12)$$

$$\mathit{\Pi}_{1t}^* = -\frac{V_W}{p(Y_t)}\lambda_{1t}+\frac{V_{Wr}-\frac{\delta V_WV_r}{(1-\gamma)V}}{p(Y_t)}\sigma+\frac{V_{W\bar{r}}-\frac{\delta V_WV_{\bar{r}}}{(1-\gamma)V}}{p(Y_t)}\bar{\rho}_1\bar{\sigma} \quad (3.13)$$

$$\mathit{\Pi}_{2t}^* = -\frac{V_W}{p(Y_t)}\lambda_{2t}+\frac{V_{W\bar{r}}-\frac{\delta V_WV_{\bar{r}}}{(1-\gamma)V}}{p(Y_t)}\bar{\rho}_2\bar{\sigma} \quad (3.14)$$

ここで、

$$p(Y_t) = W_t\left(V_{WW} - \frac{\delta V_W^2}{(1-\gamma)V}\right) \tag{3.15}$$

最適主要利害関係者報酬 (3.12) 式と最適投資条件 (3.13)(3.14) 式を HJB 方程式 (3.11) に代入して整理すると、次の値関数 V に関する偏微分方程式が得られる。

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\sigma^2 V_{rr} + \frac{1}{2}\bar{\sigma}^2 V_{\bar{r}\bar{r}} + \bar{\rho}_1\sigma\bar{\sigma}V_{r\bar{r}} - \frac{1}{2}\frac{q_1^2(Y_1)}{W_t p(Y_t)} - \frac{1}{2}\frac{q_2^2(Y_1)}{W_t p(Y_t)}\\&\qquad + \frac{\delta}{2(\gamma-1)V}\left(\sigma^2 V_r^2 + \bar{\sigma}^2 V_{\bar{r}}^2 + 2\bar{\rho}_1\sigma\bar{\sigma}V_r V_{\bar{r}}\right)\\&+ (r_t + \iota\Psi_t)W_t V_W + \kappa(\bar{r}_t - r_t)V_r + \kappa(\bar{r} - \bar{r}_t)V_{\bar{r}} - \beta V + \frac{\gamma}{1-\gamma}V_W^{-\frac{1-\gamma}{\gamma}} = 0\end{aligned} \tag{3.16}$$

ここで、

$$q_1(Y_t) = W_t\left\{\lambda_1 V_W - \sigma\left(V_{Wr} - \frac{\delta V_W V_r}{(1-\gamma)V}\right) - \bar{\rho}_1\bar{\sigma}\left(V_{W\bar{r}} - \frac{\delta V_W V_{\bar{r}}}{(1-\gamma)V}\right)\right\} \tag{3.17}$$

$$q_2(Y_t) = W_t\left\{\lambda_2 V_W - \bar{\rho}_2\bar{\sigma}\left(V_{W\bar{r}} - \frac{\delta V_W V_r}{(1-\gamma)V}\right)\right\} \tag{3.18}$$

上記偏微分方程式から値関数が次の関数形であることが推測される。

$$V(W_t, r_t, \bar{r}_t) = \big(H(r_t, \bar{r}_t)\big)^{\gamma}\frac{W_t^{1-\gamma}}{1-\gamma} \tag{3.19}$$

値関数 V に偏微分を施し、(3.13)(3.14) 式に代入し、値関数の偏微分結果とともに偏微分方程式 (3.16) に代入すると、次の命題を得る。

命題 1. 仮定 *1-7* の下、本問題 *(2.17)* の最適投資比率密度 φ^* は *(3.20)(3.21)* 式を満たしており、値関数 V を構成する関数 $H(r_t, \bar{r}_t)$ は *2* 階の偏微分方程式 *(3.22)* の解である。

$$\Pi_{1t}^* = \frac{1}{\gamma+\delta}\lambda_{1t} + \left(1 - \frac{1}{\gamma+\delta}\right)\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\right)\left(-\sigma\frac{H_r}{H} - \bar{\rho}_1\bar{\sigma}\frac{H_{\bar{r}}}{H}\right) \tag{3.20}$$

$$\Pi_{2t}^* = \frac{1}{\gamma+\delta}\lambda_{2t} + \left(1 - \frac{1}{\gamma+\delta}\right)\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\right)\left(-\bar{\rho}_2\bar{\sigma}\frac{H_{\bar{r}}}{H}\right) \tag{3.21}$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\sigma^2}{2}\left(\frac{H_{rr}}{H}\right)+\frac{\bar{\sigma}^2}{2}\left(\frac{H_{\bar{r}\bar{r}}}{H}\right)+\bar{\rho}_1\sigma\bar{\sigma}\left(\frac{H_{r\bar{r}}}{H}\right)\\
&\quad+\frac{\delta}{2(\gamma-1)(\gamma+\delta)}\left\{\sigma^2\left(\frac{H_r}{H}\right)^2+\bar{\sigma}^2\left(\frac{H_{\bar{r}}}{H}\right)^2+\bar{\rho}_1\sigma\bar{\sigma}\left(\frac{H_r}{H}\right)\left(\frac{H_{\bar{r}}}{H}\right)\right\}\\
&+\left(\kappa(\bar{r}_t-r_t)+\frac{\gamma+\delta-1}{\gamma+\delta}\sigma\lambda_{1t}\right)\left(\frac{H_r}{H}\right)+\left(\bar{\kappa}(\bar{r}-\bar{r}_t)+\frac{\gamma+\delta-1}{\gamma+\delta}\sum_{i=1}^{2}\bar{\rho}_i\bar{\sigma}\lambda_{it}\right)\left(\frac{H_{\bar{r}}}{H}\right)\\
&-\left(\frac{\gamma-1}{2\gamma(\gamma+\delta)}\|\lambda_t\|^2+\frac{\gamma-1}{\gamma}\Big((1+\iota\Psi_2)r_t-\iota\Psi_2\bar{r}_t\Big)+\frac{\beta+(\gamma-1)\iota\Psi_1}{\gamma}\right)+\left(\frac{1}{H}\right)=0
\end{aligned}
\tag{3.22}
$$

証明．補論 A.3 参照。 □

3.3 値関数を構成する金利関数の偏微分方程式の非斉次項近似

偏微分方程式 (3.22) は非斉次項 $1/H$ を含んでおり、解析解の導出を困難にしている。そこで、Campbell and Viceira (2002) が CRRA 効用と 1 ファクター金利モデルを仮定し、消費と 2 証券（安全証券と 1 国債）投資の最適化問題で導出した金利関数の常微分方程式の近似解析解を導出する際に用いた技法に楠田 (2013) の技法等を援用して同非斉次項を対数線形近似する。

先ず、(3.12) 式と値関数 (3.19) から $1/H(r_t,\bar{r}_t)=c_t/W_t$ が成立していることに留意し、$1/H(r_t,\bar{r}_t)$ を次のように $\lim_{t\to\infty}E[\log c_t-\log W_t]$ の周りで[3] 対数線形近似する。

$$
\frac{1}{H(r_t,\bar{r}_t)}\approx h_0-h_1\log H(r_t,\bar{r}_t) \tag{3.23}
$$

ここで、

$$
\begin{aligned}
h_0 &= h_1(1-\log h_1) &(3.24)\\
h_1 &= \exp\Big(\lim_{t\to\infty}E\Big[\log\Big(\frac{c_t}{W_t}\Big)\Big]\Big) &(3.25)
\end{aligned}
$$

(3.23) 式を偏微分方程式 (3.22) の非斉次項 $1/H$ に代入すると、次の近似偏微分方程式を得る。

[3] Campbell and Viceira (2002) は $E[\log c_t-\log W_t]$ の周りで対数線形近似しているが、この場合、$E[\log c_t-\log W_t]$ は r_t と $\bar{r}_t$ に依存する。そこで、一定値をとる $\lim_{t\to\infty}E[\log c_t-\log W_t]$ の周りで対数線形近似を行っている。

$$
\begin{aligned}
&\frac{\sigma^2}{2}\left(\frac{H_{rr}}{H}\right)+\frac{\bar{\sigma}^2}{2}\left(\frac{H_{\bar{r}\bar{r}}}{H}\right)+\bar{\rho}_1\sigma\bar{\sigma}\left(\frac{H_{r\bar{r}}}{H}\right)\\
&\quad+\frac{\delta}{2(\gamma-1)(\gamma+\delta)}\left\{\sigma^2\left(\frac{H_r}{H}\right)^2+\bar{\sigma}^2\left(\frac{H_{\bar{r}}}{H}\right)^2+\bar{\rho}_1\sigma\bar{\sigma}\left(\frac{H_r}{H}\right)\left(\frac{H_{\bar{r}}}{H}\right)\right\}\\
&+\left(\kappa(\bar{r}_t-r_t)+\frac{\gamma+\delta-1}{\gamma+\delta}\sigma\lambda_{1t}\right)\left(\frac{H_r}{H}\right)+\left(\bar{\kappa}(\bar{r}-\bar{r}_t)+\frac{\gamma+\delta-1}{\gamma+\delta}\sum_{i=1}^{2}\bar{\rho}_i\bar{\sigma}\lambda_{it}\right)\left(\frac{H_{\bar{r}}}{H}\right)\\
&-\left(\frac{\gamma-1}{2\gamma(\gamma+\delta)}\|\lambda_t\|^2+\frac{\gamma-1}{\gamma}\Big((1+\iota\Psi_2)r_t-\iota\Psi_2\bar{r}_t\Big)+\frac{\beta+(\gamma-1)\iota\Psi_1}{\gamma}-h_0\right)\\
&\qquad-h_1\log H=0 \qquad (3.26)
\end{aligned}
$$

近似偏微分方程式 (3.26) の解が次式で表される 2 次関数の指数関数であることは容易に推測される。

$$
H(r_t,\bar{r}_t)=\exp\left(a_0+a_1r_t+a_2\bar{r}_t+\frac{1}{2}a_{11}r_t^2+a_{12}r_t\bar{r}_t+\frac{1}{2}a_{22}\bar{r}_t^2\right) \qquad (3.27)
$$

このとき、

$$
h_1=\lim_{t\to\infty}\left[-a_0+a_1E[r_t]+a_2E[\bar{r}_t]+\frac{1}{2}a_{11}E[r_t^2]+a_{12}E[r_t\bar{r}_t]+\frac{1}{2}a_{22}E[\bar{r}_t^2]\right] \qquad (3.28)
$$

平均短期金利 $\bar{r}_t$ は線形確率微分方程式 (2.2) の解であり、次のように解ける。

$$
\bar{r}_t=\bar{r}+(\bar{r}_0-\bar{r})e^{-\bar{\kappa}t}-\sum_{i=1}^{2}\bar{\rho}_i\bar{\sigma}\int_0^t e^{\bar{\kappa}(s-t)}dz_{is} \qquad (3.29)
$$

短期金利 r_t は確率微分方程式 (2.1) の $\bar{r}_t$ を $\bar{r}$ で近似すると、線形確率微分方程式の解となり、次のように近似出来る。

$$
r_t\approx\bar{r}+(r_0-\bar{r})e^{-\kappa t}-\sigma\int_0^t e^{\kappa(s-t)}dz_{1s} \qquad (3.30)
$$

(3.29) 式と (3.30) の近似式を用いて (3.28) 式を計算した h_1 の近似値を $\tilde{h}_1$ と定義する。このとき、$\tilde{h}_1$ は次のように算出される。

$$
\tilde{h}_1=-a_0-\bar{r}(a_1+a_2)-\frac{1}{2}\left(\frac{\sigma^2}{2\kappa}+\bar{r}^2\right)a_{11}-\left(\frac{\bar{\rho}_1\sigma\bar{\sigma}}{\kappa+\bar{\kappa}}+\bar{r}^2\right)a_{12}-\frac{1}{2}\left(\frac{\bar{\sigma}^2}{2\bar{\kappa}}+\bar{r}^2\right)a_{22} \qquad (3.31)
$$

また、上式を用いて (3.24) 式を計算した h_0 の近似値を $\tilde{h}_0$ と定義する。すなわち、

$$
\tilde{h}_0=\tilde{h}_1(1-\log\tilde{h}_1) \qquad (3.32)
$$

近似値 $(\tilde{h}_0,\tilde{h}_1)$ を用いた近似偏微分方程式 (3.26) の解に基づく近似値関数、近似最適主要利害関係者報酬、近似最適投資比率密度をそれぞれ $\tilde{V},\tilde{c}^*,\tilde{\varphi}^*$ と定義する。

3.4 近似解析解

金利・平均金利の 2 変数関数 (3.27) に偏微分を施し、近似偏微分方程式 (3.26) に代入すると、次式を得る。

$$
\begin{aligned}
&\frac{\sigma^2}{2}\Big(a_{11}+\big(a_1+a_{11}r_t+a_{12}\bar{r}_t\big)^2\Big)+\frac{\bar{\sigma}^2}{2}\Big(a_{22}+\big(a_2+a_{12}r_t+a_{22}\bar{r}_t\big)^2\Big)\\
&\qquad+\bar{\rho}_1\sigma\bar{\sigma}\Big(a_{12}+\big(a_1+a_{11}r_t+a_{12}\bar{r}_t\big)\big(a_2+a_{12}r_t+a_{22}\bar{r}_t\big)\Big)\\
&+\frac{\delta}{2(\gamma-1)(\gamma+\delta)}\Big\{\sigma^2\big(a_1+a_{11}r_t+a_{12}\bar{r}_t\big)^2+\bar{\sigma}^2\big(a_2+a_{12}r_t+a_{22}\bar{r}_t\big)^2\\
&\qquad+\bar{\rho}_1\sigma\bar{\sigma}\big(a_1+a_{11}r_t+a_{12}\bar{r}_t\big)\big(a_2+a_{12}r_t+a_{22}\bar{r}_t\big)\Big\}\\
&+\left(\kappa(\bar{r}_t-r_t)+\frac{\gamma+\delta-1}{\gamma+\delta}\sigma\ \big(\lambda_1+\lambda_{11}r_t+\lambda_{12}\bar{r}_t\big)\right)\big(a_1+a_{11}r_t+a_{12}\bar{r}_t\big)\\
&+\left(\bar{\kappa}(\bar{r}-\bar{r}_t)+\frac{\gamma+\delta-1}{\gamma+\delta}\bar{\sigma}\sum_{i=1}^{2}\bar{\rho}_i\big(\lambda_i+\lambda_{i1}r_t+\lambda_{i2}\bar{r}_t\big)\big(a_2+a_{12}r_t+a_{22}\bar{r}_t\big)\right)\\
&-\left(\frac{\gamma-1}{2\gamma(\gamma+\delta)}\sum_{i=1}^{2}\big(\lambda_i+\lambda_{i1}r_t+\lambda_{i2}\bar{r}_t\big)^2+\frac{\gamma-1}{\gamma}\Big((1+\iota\Psi_2)r_t-\iota\Psi_2\bar{r}_t\Big)+\frac{\beta+(\gamma-1)\iota\psi_1}{\gamma}-\tilde{h}_0\right)\\
&\qquad-\tilde{h}_1\left(a_0+a_1r_t+a_2\bar{r}_t+\frac{1}{2}a_{11}r_t^2+a_{12}r_t\bar{r}_t+\frac{1}{2}a_{22}\bar{r}_t^2\right)=0 \qquad (3.33)
\end{aligned}
$$

上式は $(r_t,\bar{r}_t,r_t^2,r_t\bar{r}_t,\bar{r}_t^2)$ に関する恒等式であるから、$(a_0,a_1,a_2,a_{11},a_{12},a_{22})$ に関する 6 元連立非線形方程式が得られる。(3.32) 式を (3.33) に代入し $\tilde{h}_0$ を消去した後、同 6 元連立方程式と (3.31) 式を結合した 7 元連立非線形方程式を数値解法によって解けば、$(a_0,a_1,a_2,a_{11},a_{12},a_{22},\tilde{h}_1)$ が算出される。このとき、次の命題を得る。

命題 2. 仮定 *1-7* の下、本問題 *(2.17)* の近似値関数と近似最適主要利害関係者報酬はそれぞれ *(3.34)* 式と *(3.35)* 式で表され、近似最適投資比率密度は *(3.36)(3.37)* 式を満たしている。

$$
\tilde{V}(W_t,r_t,\bar{r}_t)=\exp\left[\gamma\left\{a_0+a_1r_t+a_2\bar{r}_t+\frac{1}{2}a_{11}r_t^2+a_{12}r_t\bar{r}_t+\frac{1}{2}a_{22}\bar{r}_t^2\right\}\right]\frac{W_t^{1-\gamma}}{1-\gamma} \qquad (3.34)
$$

$$
\tilde{c}_t^* \ = \ \exp\left[-a_0\ -\ a_1r_t\ -\ a_2\bar{r}_t\ -\ \frac{1}{2}a_{11}r_t^2\ -\ a_{12}r_t\bar{r}_t\ -\ \frac{1}{2}a_{22}\bar{r}_t^2\right]W_t \qquad (3.35)
$$

$$
\begin{aligned}
&\tilde{\Pi}_{1t}^*=\frac{1}{\gamma+\delta}\,\lambda_{1t}+\left(1-\frac{1}{\gamma+\delta}\right)\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\right)\\
&\times\left(-\Big(\sigma a_1+\bar{\rho}_1\bar{\sigma}a_2\Big)-\Big(\sigma a_{11}+\bar{\rho}_1\bar{\sigma}a_{12}\Big)r_t-\Big(\sigma a_{12}+\bar{\rho}_1\bar{\sigma}a_{22}\Big)\bar{r}_t\right) \qquad (3.36)
\end{aligned}
$$

$$
\tilde{\Pi}_{2t}^*=\frac{1}{\gamma+\delta}\,\lambda_{2t}+\left(1-\frac{1}{\gamma+\delta}\right)\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\right)\left(-\bar{\rho}_2\bar{\sigma}\Big(a_2+a_{12}r_t+a_{22}\bar{r}_t\Big)\right) \qquad (3.37)
$$

近似最適投資比率密度の条件式 (3.36)(3.37) は、この種のやや複雑なポートフォリオ最適化問題で示されている多くの結果と同様に、モデルの係数と最適投資比率の関数関係が不明確なほか、金利関数の 7 係数 $(a_0, a_1, a_2, a_{11}, a_{12}, a_{22}, \tilde{h}_1)$ が 7 元連立非線形方程式の数値解として陰伏的にしか与えられてないため、当該最適投資比率を用いて投資家の相対的危険回避度と「相対的曖昧性回避度」を推定するなどの実証分析が困難である。次章では、金利モデルの係数間の制約に加え、リスクの市場価格一定の完備アフィン・モデルを改めて仮定することにより、上記関数関係が明確で、且つ数値解法負担が軽く実証分析の容易な近似解析解を導出する。その前に近似最適ポートフォリオの代表的具体例をみておく。

3.5 近似最適ポートフォリオの代表的具体例

近似最適ポートフォリオの代表的な具体例を示す。以下では、(3.36) 式と (3.37) 式の右辺の項をそれぞれ y_{1t}, y_{2t} とする。

生命保険会社が満期の異なる国債を短期国債群 $(0, \tau_1]$、中長期国債群 $(\tau_1, \tau_2]$、超長期国債群 $(\tau_2, \bar{\tau}]$ の 3 群に分類し、各国債群内の投資比率密度は一様分布とする投資を行う場合を考察する。尚、超長期債市場は流動性が低く、大口売買の市場衝撃が大きいことから、保有量調整が困難である。そこで、超長期債の投資比率密度は或る一定の低位水準 φ_3^* とする。このとき、2 国債群の最適投資比率密度を $(\varphi_1^*, \varphi_2^*)$ とすると、(3.36)(3.37) 式より、2 国債の近似最適投資比率は次式を満たしている。

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\bar{\tau}}\int_0^{\tau_1}(\sigma_1(\tau)-v_1)d\tau & \frac{1}{\bar{\tau}}\int_{\tau_1}^{\tau_2}(\sigma_1(\tau)-v_1)d\tau \\ \frac{1}{\bar{\tau}}\int_0^{\tau_1}(\sigma_2(\tau)-v_2)d\tau & \frac{1}{\bar{\tau}}\int_{\tau_1}^{\tau_2}(\sigma_2(\tau)-v_2)d\tau \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi_{1t}^*\\ \varphi_{2t}^*\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} y_{1t} - \frac{1}{\bar{\tau}}\int_{\tau_2}^{\bar{\tau}}\varphi_3^*(\sigma_1(\tau)-v_1)d\tau + \frac{1}{\bar{\tau}}\int_0^{\bar{\tau}}\psi_t(\tau)\sigma_1(\tau)d\tau - (1+\Psi_t)v_1 \\ y_{2t} - \frac{1}{\bar{\tau}}\int_{\tau_2}^{\bar{\tau}}\varphi_3^*(\sigma_2(\tau)-v_2)d\tau + \frac{1}{\bar{\tau}}\int_0^{\bar{\tau}}\psi_t(\tau)\sigma_2(\tau)d\tau - (1+\Psi_t)v_2 \end{pmatrix} \tag{3.38}$$

(3.38) 式右辺の項を (y_{1t}^*, y_{2t}^*) とおくと、最適投資比率密度は次のように求められる。

$$\begin{pmatrix}\varphi_{1t}^*\\ \varphi_{2t}^*\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\bar{\tau}}\int_0^{\tau_1}(\sigma_1(\tau)-v_1)d\tau & \frac{1}{\bar{\tau}}\int_{\tau_1}^{\tau_2}(\sigma_1(\tau)-v_1)d\tau \\ \frac{1}{\bar{\tau}}\int_0^{\tau_1}(\sigma_2(\tau)-v_2)d\tau & \frac{1}{\bar{\tau}}\int_{\tau_1}^{\tau_2}(\sigma_2(\tau)-v_2)d\tau \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}y_{1t}^*\\ y_{2t}^*\end{pmatrix} \tag{3.39}$$

よって、各国債群への投資比率は次を満たしている。

$$\begin{aligned} \varphi_{1t}^*\tau_1 &= D^{-1}\left(\int_{\tau_1}^{\tau_2}\Big(\sigma_2(\tau)-v_2\Big)d\tau\, y_{1t}^* - \int_{\tau_1}^{\tau_2}\Big(\sigma_1(\tau)-v_1\Big)d\tau\, y_{2t}^*\right)\frac{\tau_1}{\bar{\tau}} \\ \varphi_{2t}^*(\tau_2-\tau_1) &= D^{-1}\left(-\int_0^{\tau_1}\Big(\sigma_2(\tau)-v_2\Big)d\tau\, y_{1t}^* + \int_0^{\tau_1}\Big(\sigma_1(\tau)-v_1\Big)d\tau\, y_{2t}^*\right)\frac{\tau_2-\tau_1}{\bar{\tau}} \end{aligned}$$

ここで、

$$D = \left(\frac{1}{\bar{\tau}}\int_0^{\tau_1}(\sigma_1(\tau)-v_1)d\tau\right)\left(\frac{1}{\bar{\tau}}\int_{\tau_1}^{\tau_2}(\sigma_2(\tau)-v_2)d\tau\right) - \left(\frac{1}{\bar{\tau}}\int_{\tau_1}^{\tau_2}(\sigma_1(\tau)-v_1)d\tau\right)\left(\frac{1}{\bar{\tau}}\int_0^{\tau_1}(\sigma_2(\tau)-v_2)d\tau\right)$$

4 完備アフィン・モデルと金利関連係数間制約下の近似解析解

本章では、リスクの市場価格を一定とした「完備アフィン・モデル」を仮定し、金利モデルの係数間の関係性に制約を付加することにより、モデルの諸係数と最適投資比率の関数関係が明確で、且つ数値解法負担が非常に軽く実証分析の容易な近似解析解を導出する。

4.1 追加的仮定

リスクの市場価格を一定とした「完備アフィン・モデル」を仮定する。また、平均金利は金利に比べ平均回帰速度と分散が有意に小さいとみられるほか、金利・平均金利間の相関も相当程度低いとみられることから、次の仮定を置く。

仮定 8. *1.* リスクの市場価格における仮定 *2* において、$\lambda_{i1} = \lambda_{i2} = 0$ $(i = 1, 2)$、すなわち、$\lambda_{it} = \lambda_i$ である。

2. 金利モデルの係数 $\sigma, \bar{\sigma}, \bar{\rho}_1, \kappa, \bar{\kappa}$ の間に次の関係式が成立している。

$$\left(\frac{\bar{\sigma}}{\sigma}\right)^2,\ \bar{\rho}_1\frac{\bar{\sigma}}{\sigma},\ \left(\frac{\bar{\kappa}}{\kappa}\right)^2 \approx 0 \tag{4.1}$$

仮定 8.1 の $\lambda_{it} = \lambda_i$ を (3.33) 式に代入し、$(r_t, \bar{r}_t, r_t^2, r_t\bar{r}_t, \bar{r}_t^2)$ の各係数と定数項を整理すると、次の連立方程式を得る。

$$\frac{\gamma(\gamma+\delta-1)}{(\gamma-1)(\gamma+\delta)}\left(\sigma^2 a_{11}^2 + 2\bar{\rho}_1\sigma\bar{\sigma}a_{11}a_{12} + \bar{\sigma}^2 a_{12}^2\right) - (\tilde{h}_1 + 2\kappa)a_{11} = 0 \tag{4.2}$$

$$\frac{\gamma(\gamma+\delta-1)}{(\gamma-1)(\gamma+\delta)}\left(\bar{\sigma}^2 a_{22}^2 + 2\bar{\rho}_1\sigma\bar{\sigma}a_{12}a_{22} + \sigma^2 a_{12}^2\right) - (\tilde{h}_1 + 2\bar{\kappa})a_{22} + 2\kappa a_{12} = 0 \tag{4.3}$$

$$\frac{\gamma(\gamma+\delta-1)}{(\gamma-1)(\gamma+\delta)}\left(\sigma^2 a_{11}a_{12} + \bar{\sigma}^2 a_{12}a_{22} + \bar{\rho}_1\sigma\bar{\sigma}(a_{11}a_{22} + a_{12}^2)\right) + \kappa a_{11} - (\tilde{h}_1 + \kappa + \bar{\kappa})a_{12} = 0 \tag{4.4}$$

$$\frac{\gamma(\gamma+\delta-1)}{(\gamma-1)(\gamma+\delta)}\Big(\sigma^2 a_1 a_{11}+\bar{\sigma}^2 a_2 a_{12}+\bar{\rho}_1\sigma\bar{\sigma}(a_1 a_{12}+a_2 a_{11})\Big)$$
$$+\frac{(\gamma+\delta-1)\sigma\lambda_1}{\gamma+\delta}a_{11}+\left(\frac{(\gamma+\delta-1)\sum_{i=1}^{2}\bar{\rho}_i\bar{\sigma}\lambda_i}{\gamma+\delta}+\bar{\kappa}\bar{r}\right)a_{12}$$
$$-(\tilde{h}_1+\kappa)a_1-\frac{(\gamma-1)(1+\iota\psi_2)}{\gamma}=0 \quad (4.5)$$

$$\frac{\gamma(\gamma+\delta-1)}{(\gamma-1)(\gamma+\delta)}\Big(\sigma^2 a_1 a_{12}+\bar{\sigma}^2 a_2 a_{22}+\bar{\rho}_1\sigma\bar{\sigma}(a_1 a_{22}+a_2 a_{12})\Big)$$
$$+\frac{(\gamma+\delta-1)\sigma\lambda_1}{\gamma+\delta}a_{12}+\left(\frac{(\gamma+\delta-1)\sum_{i=1}^{2}\bar{\rho}_i\bar{\sigma}\lambda_i}{\gamma+\delta}+\bar{\kappa}\bar{r}\right)a_{22}$$
$$+\kappa a_1-(\tilde{h}_1+\bar{\kappa})a_2+\frac{(\gamma-1)\iota\psi_2}{\gamma}=0 \quad (4.6)$$

$$\frac{\sigma^2}{2}a_{11}+\frac{\bar{\sigma}^2}{2}a_{22}+\bar{\rho}_1\sigma\bar{\sigma}a_{12}+\frac{\gamma(\gamma+\delta-1)}{2(\gamma-1)(\gamma+\delta)}\Big(\sigma^2 a_1^2+\bar{\sigma}^2 a_2^2\Big)$$
$$+\frac{\gamma(\gamma+\delta-1)}{(\gamma-1)(\gamma+\delta)}\bar{\rho}_i\sigma\bar{\sigma}a_1 a_2+\frac{\gamma+\delta-1}{\gamma+\delta}\left(\lambda_1 a_1+\sum_{i=1}^{2}\bar{\rho}_i\bar{\sigma}\lambda_i a_2\right)$$
$$+\frac{1-\gamma}{2\gamma(\gamma+\delta)}\sum_{i=1}^{2}\lambda_i^2-\frac{\beta+(\gamma-1)\iota\psi_1}{\gamma}+\tilde{h}_0-\tilde{h}_1 a_0=0 \quad (4.7)$$

上記連立方程式に仮定2.2の近似式(4.1)を適用すると、(4.2)式より、$a_{11}\approx 0$、或いは、

$$a_{11}\approx\frac{(\gamma-1)(\gamma+\delta)}{\gamma(\gamma+\delta-1)}\frac{\tilde{h}_1+2\kappa}{\sigma^2} \quad (4.8)$$

が得られる。以下では、$a_{11}\approx 0$ に対応する近似解を「低次の近似解」、(4.8)式に対応する近似解を「高次の近似解」と呼ぶ。

4.2 低次と高次の近似解析解

4.2.1 低次の近似解

低次の近似解については、$a_{11}\approx 0$ を (4.4)(4.3) 式に代入すると、$a_{12}, a_{22}\approx 0$ が得られる。これらを (4.5)(4.6) 式に代入すると、

$$a_1 \approx -\frac{(\gamma-1)(1+\iota\Psi_2)}{\gamma(\tilde{h}_1+\kappa)} \quad (4.9)$$
$$a_2 \approx \frac{(\gamma-1)\big\{\iota\Psi_2(\tilde{h}_1+\kappa)-(1+\iota\Psi_2)\kappa\big\}}{\gamma(\tilde{h}_1+\kappa)(\tilde{h}_1+\bar{\kappa})} \quad (4.10)$$

a_0 は $a_{11}, a_{12}, a_{22} \approx 0$ と上式を (4.7) 式に代入して得られる。以上より、近似最適投資比率密度は次の二つの条件式を満たす。

$$\begin{aligned}
\tilde{\Pi}^*_{1t} &\approx \frac{1}{\gamma+\delta}\lambda_1 + \left(1 - \frac{1}{\gamma+\delta}\right)\frac{(1+\iota\Psi_2)(\tilde{h}_1+\bar{\kappa})\sigma + \left\{(1+\iota\Psi_2)\kappa - \iota\Psi_2(\tilde{h}_1+\kappa)\right\}\bar{\rho}_1\bar{\sigma}}{(\tilde{h}_1+\kappa)(\tilde{h}_1+\bar{\kappa})} \\
\tilde{\Pi}^*_{2t} &\approx \frac{1}{\gamma+\delta}\lambda_2 + \left(1 - \frac{1}{\gamma+\delta}\right)\frac{\left\{(1+\iota\Psi_2)\kappa - \iota\Psi_2(\tilde{h}_1+\kappa)\right\}\bar{\rho}_2\bar{\sigma}}{(\tilde{h}_1+\kappa)(\tilde{h}_1+\bar{\kappa})}
\end{aligned}$$

上記二式は、最適投資比率が短期金利にも平均短期金利にも依存しない一定値となることを示している。これは低近似解が低金利局面では短期債から長期債へ、高金利局面では長期債から短期債へ移行する現実に観察される投資行動を説明出来ないことを意味している。

4.2.2 高次の近似解

高次の近似解については、次の命題を得る。

命題 3. 仮定 *1-8* の下、本問題 *(2.17)* の高次の解として次の *1*・*2* が成り立つ。

1. 近似値関数と近似最適主要利害関係者報酬はそれぞれ *(4.11)* 式と *(4.12)* 式で近似される。

$$\tilde{V}(W_t, r_t, \bar{r}_t) \approx \exp\left[\gamma\left\{a_0 + a_1 r_t + a_2\bar{r}_t + \frac{1}{2}a_{11}r_t^2 + a_{12}r_t\bar{r}_t + \frac{1}{2}a_{22}\bar{r}_t^2\right\}\right]\frac{W_t^{1-\gamma}}{1-\gamma} \tag{4.11}$$

$$\tilde{c}^*_t \approx \exp\left[-a_0 - a_1 r_t - a_2\bar{r}_t - \frac{1}{2}a_{11}r_t^2 - a_{12}r_t\bar{r}_t - \frac{1}{2}a_{22}\bar{r}_t^2\right]W_t \tag{4.12}$$

ここで、a_{22} は近似式 *(4.8)* を満たしており、

$$a_{12} \approx -\left(1 + \frac{\bar{\kappa}}{\kappa}\right)a_{11} \tag{4.13}$$

$$a_{22} \approx -\left(1 + \frac{\bar{\kappa}}{\kappa}\right)a_{12} \approx \left(1 + \frac{2\bar{\kappa}}{\kappa}\right)a_{11} \tag{4.14}$$

$$a_1 \approx -\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)\left(\frac{(\tilde{h}_1+2\kappa)(\sigma\lambda_1 - \bar{\rho}_2\bar{\sigma}\lambda_2) - (1+\iota\Psi_2)\sigma^2}{\kappa\sigma^2}\right) - \frac{\bar{\kappa}}{\kappa}\bar{r}\,a_{12} \tag{4.15}$$

$$\begin{aligned}
a_2 \approx \frac{1}{\tilde{h}_1+\bar{\kappa}}&\left\{\left(-\left(1+\frac{\bar{\kappa}}{\kappa}\right)(\tilde{h}_1+2\kappa)+\kappa\right)a_1\right. \\
&\left. + \left(\frac{\gamma+\delta-1}{\gamma+\delta}\Big(\sigma\lambda_1 - \bar{\rho}_2\bar{\sigma}\lambda_2\Big)a_{12} + \frac{(\gamma-1)\iota\Psi_2}{\gamma} + \bar{\kappa}\bar{r}\,a_{22}\right)\right\}
\end{aligned} \tag{4.16}$$

$$a_0 \approx \frac{1}{\tilde{h}_1}\left(\frac{\sigma^2}{2}a_{11} + \frac{\gamma(\gamma+\delta-1)}{2(\gamma-1)(\gamma+\delta)}\sigma^2 a_1^2 + \frac{\gamma+\delta-1}{\gamma+\delta}\lambda_1 a_1 \right.$$
$$\left. + \frac{1-\gamma}{2\gamma(\gamma+\delta)}\sum_{i=1}^{2}\lambda_i^2 - \frac{\beta+(\gamma-1)\iota\Psi_1}{\gamma} + \tilde{h}_1(1-\log\tilde{h}_1)\right) \tag{4.17}$$

$\tilde{h}_1$ は、*(3.31)* 式の $(a_0, a_1, a_2, a_{11}, a_{12}, a_{22})$ に *(4.8)* 式、*(4.13)-(4.17)* 式を代入して得られる方程式の数値解法により求まる。

2. 近似最適投資比率密度は近似式 *(4.18)(4.19)* を満たしている。

$$\tilde{\Pi}^*_{1t} \approx \frac{1}{\gamma+\delta}\lambda_1 + \left(1-\frac{1}{\gamma+\delta}\right)$$
$$\times\left\{\frac{(\tilde{h}_1+2\kappa)(\sigma\lambda_1-\bar{\rho}_2\bar{\sigma}\lambda_2)-(1+\iota\Psi_2)\sigma^2}{\kappa\sigma} - \frac{\iota\Psi_2\bar{\rho}_1\bar{\sigma}}{\tilde{h}_1+\bar{\kappa}}\right\}$$
$$+\frac{\tilde{h}_1+2\kappa}{\sigma}\left\{\left(\bar{r}_t - r_t\right) + \frac{\bar{\kappa}}{\kappa}\left(\bar{r}_t-\bar{r}\right)\right\} \tag{4.18}$$

$$\tilde{\Pi}^*_{2t} \approx \frac{1}{\gamma+\delta}\lambda_2 + \left(1-\frac{1}{\gamma+\delta}\right)$$
$$\times\left\{\frac{-\tilde{h}_1(\tilde{h}_1+2\kappa)\lambda_1+(1+\iota\Psi_2)(\tilde{h}_1+\kappa)\sigma-\iota\Psi_2\kappa\sigma}{\kappa(\tilde{h}_1+\bar{\kappa})\sigma}\right\}\bar{\rho}_2\bar{\sigma}$$
$$-\frac{(\tilde{h}_1+2\kappa)\bar{\rho}_2\bar{\sigma}}{\sigma^2}\left(\bar{r}_t-r_t\right) \tag{4.19}$$

ここで、

$$\sigma_1(\tau) = \frac{1}{\kappa}\left(1-e^{-\kappa\tau}\right)\sigma + \left\{\frac{1}{\bar{\kappa}}\left(1-e^{-\bar{\kappa}\tau}\right) + \frac{1}{\kappa-\bar{\kappa}}\left(e^{-\kappa\tau}-e^{-\bar{\kappa}\tau}\right)\right\}\bar{\rho}_1\bar{\sigma} \tag{4.20}$$
$$\sigma_2(\tau) = \left\{\frac{1}{\bar{\kappa}}\left(1-e^{-\bar{\kappa}\tau}\right) + \frac{1}{\kappa-\bar{\kappa}}\left(e^{-\kappa\tau}-e^{-\bar{\kappa}\tau}\right)\right\}\bar{\rho}_2\bar{\sigma} \tag{4.21}$$

証明. 補論 A.4 参照。 □

命題 3 を命題 2 と比較すると、数値解法負担は 1 変数方程式の数値解導出にまで軽減している。また、近似最適投資比率密度が満たす条件式 (4.18)(4.19) 式は、前章で導出された条件式 (3.36)(3.37) に比べ、モデルの諸係数と最適投資比率が関数関係で明示されており、実証分析を容易にしていることがみてとれる。

参考文献

[1] Anderson, E. W., L. P. Hansen, and T. J. Sargent (2003), "A Quartet of Semi-groups for Model Specification, Robustness, Prices of Risk, and

Model Detection," *Journal of the European Economic Association*, 1, 68-123.

[2] Campbell, J. Y. and L. M. Viceira (2002), *Strategic Asset Allocation*, Oxford University Press, Oxford, NY.

[3] Cheng, L. P. and L. G. Epstein (2002), "Ambiguity, Risk, and Asset Returns in Continuous Time," *Econometrica*, 70.

[4] Duffee, G. R. (2002), "Term Premia and Interest Forecast in Affine Models," *Journal of Finance*, 57, 405-43

[5] Duffie, D. and R. Kan (2002), "A Yield-Factor Model of Interest Rates," *Mathematical Finance*, 6, 379-406.

[6] Epstein, L. G. and T. Wang (2001), "Subjective Probabilities on Subjectively Umbiguous Events," *Econometrica*, 69, 265-306.

[7] Hull, J. C. and A. White (1994), "Numerical Procedures for Implementing Term Structure Models II: Two Factor Models," *Journal of Derivatives*, 2, 37-48.

[8] Knight, F. H. (1921), *Risk, Uncertainty, and Profit*, Boston: Houghton Mifflin.

[9] Kusuda, K. (2006), "A Robust Recursive Utility under Jump-Diffusion Information," Working Paper B-9, Center for Risk Research, Faculty of Economics, Shiga University.

[10] Maenhout, P. J. (2004), "Robust Portfolio Rules and Asset Pricing," *The Review of Financial Studies* 17, 4, 951-84.

[11] 楠田浩二 (2013)「相似拡大的頑健効用と 2 ファクター金利モデルに基づく消費と株式・国債投資の多期間最適化問題における 2 種類の近似解析解」Discussion Paper J-40、滋賀大学経済学部附属リスク研究センター

A 証明

A.1 補題 1 の証明

標準ブラウン運動 (z_1, z_2) とリスクの市場価格 (λ_1, λ_2) により

$$z_{it}^* = z_{it} - \int_0^t \lambda_{is}\, ds \qquad i = 1, 2 \tag{A.1}$$

で定義される確率過程 (z_1^*, z_2^*) は、ギルサノフの定理より、リスク中立確率測度下の標準ブラウン運動である。よって、本稿の 2 ファクター金利モデルは、(z_1^*, z_2^*) を用いて

$$
\begin{aligned}
dr_t &= \Big(\kappa\big(\bar{r}_t - r_t\big) - \sigma\big(\lambda_1 + \lambda_{11} r_t + \lambda_{12}\bar{r}_t\big)\Big)\, dt - \sigma\, dz_{1t}^* \\
d\bar{r}_t &= \Big(\bar{\kappa}\big(\bar{r} - \bar{r}_t\big) - \sum_{i=1}^{2} \bar{\rho}_i \bar{\sigma}\big(\lambda_i + \lambda_{i1} r_t + \lambda_{i2}\bar{r}_t\big)\Big)\, dt - \sum_{i=1}^{2} \bar{\rho}_i\, \bar{\sigma}\, dz_{it}^*
\end{aligned}
$$

と表現される。

今、割引債 B^T を状態変数 $(r, \bar{r}_t, t)$ の上に書かれた派生資産と看做すと、滑らかな関数 $f(r_t, \bar{r}_t, t)$ により、

$$
B_t^T = f(r_t, \bar{r}_t, t) \tag{A.2}
$$

と表記される。このとき、無裁定条件から、f は次の偏微分方程式の境界値問題の解となっていることが示される。

$$
f_t + \mu_t f_r + \bar{\mu}_t f_{\bar{r}} + \frac{\sigma^2}{2} f_{rr} + \frac{\bar{\sigma}^2}{2} f_{\bar{r}\bar{r}} + \rho\sigma\bar{\sigma} f_{r\bar{r}} - rf = 0 \tag{A.3}
$$

$$
\text{境界条件：}\quad f(T) = 1 \tag{A.4}
$$

ここで、

$$
\begin{aligned}
\mu_t &= \kappa\big(\bar{r}_t - r_t\big) - \sigma\big(\lambda_1 + \lambda_{11} r_t + \lambda_{12}\bar{r}_t\big) \\
\bar{\mu}_t &= \bar{\kappa}\big(\bar{r} - \bar{r}_t\big) - \sum_{i=1}^{2} \bar{\rho}_i \bar{\sigma}\big(\lambda_i + \lambda_{i1} r_t + \lambda_{i2}\bar{r}_t\big)
\end{aligned}
$$

一方、本 2 ファクター・モデルはアフィン・モデルなので、上記偏微分方程式の解 f は滑らかな関数 b_0, b_1, b_2 によって

$$
f(r_t, \bar{r}_t, t) = e^{-b_0(t) - b_1(t) r_t - b_2(t)\bar{r}_t} \tag{A.5}
$$

$$
\text{境界条件：}\quad b_0(T) = b_1(T) = b_2(T) = 0 \tag{A.6}
$$

と書けることが示される。(A.5) 式に偏微分を施し、(A.3) 式に代入すると、次式を得る。

$$
\begin{aligned}
&- b_0' - b_1' r_t - b_2' \bar{r}_t - \Big(\kappa\big(\bar{r}_t - r_t\big) - \sigma\big(\lambda_1 + \lambda_{11} r_t + \lambda_{12}\bar{r}_t\big)\Big) b_1 \\
&-\Big(\bar{\kappa}\big(\bar{r} - \bar{r}_t\big) - \bar{\sigma} \sum_{i=1}^{2} \bar{\rho}_i \big(\lambda_i + \lambda_{i1} r_t + \lambda_{i2}\bar{r}_t\big)\Big) b_2 + \frac{\sigma^2}{2} b_1^2 + \frac{\bar{\sigma}^2}{2} b_2^2 + \bar{\rho}_1 \sigma\bar{\sigma} b_2 b_3 - r_t = 0
\end{aligned} \tag{A.7}
$$

(A.7) 式は $(r_t, \bar{r}_t)$ の恒等式であるから、$(r_t, \bar{r}_t)$ の係数を整理すると、(2.7) 式を得る。最後に、(A.5) 式を対数微分して B_t^T の確率微分方程式を導出すると、(2.6) 式を得る。

A.2　補題 2 の証明

(満期までの期間が τ の国債価格、生命保険証券価格をそれぞれ $B_t(\tau)$、$L_t(\tau)$ と表記する。所与の c の下、株式・全国債・全保険証券のポートフォリオ $(\vartheta, \vartheta(\tau), \zeta(\tau))$ を考える。先ず、次式が成り立っている。

$$W_t = \vartheta_t S_t + \frac{1}{\bar{\tau}} \int_0^{\bar{\tau}} \vartheta_t(\tau) B_t(\tau) d\tau - \frac{1}{\bar{\tau}} \int_0^{\bar{\tau}} \zeta_t(\tau) L_t(\tau) d\tau \tag{A.8}$$

$\varepsilon = \varepsilon' + \varepsilon''$ と略記する。当該ポートフォリオは各時点で $(\varepsilon \Psi_t W_t + c_t)dt$ の流出があることに留意すると、次式が得られる。

$$dW_t = \vartheta_t dS_t + \frac{1}{\bar{\tau}} \int_0^{\bar{\tau}} \vartheta_t(\tau) dB_t(\tau) d\tau - \frac{1}{\bar{\tau}} \int_0^{\bar{\tau}} \zeta_t(\tau) dL_t(\tau) d\tau - (\varepsilon \Psi_t W_t + c_t) dt \tag{A.9}$$

上式の dS_t、$dB_t(\tau)$、$dL_t(\tau)$ にそれぞれ (2.4) 式、(2.5) 式、(2.9) 式を代入し、そこで現れる $\vartheta_t S_t$ に (A.8) 式を用いると、次式を得る。

$$\begin{aligned} dW_t = &\left(W_t - \frac{1}{\bar{\tau}} \int_0^{\bar{\tau}} \vartheta_t(\tau) B_t(\tau) d\tau + \frac{1}{\bar{\tau}} \int_0^{\bar{\tau}} \zeta_t(\tau) L_t(\tau) d\tau \right) \\ &\times \left\{ \left(r_t + \sum_{i=1}^{2} v_i \lambda_{it} \right) dt + \sum_{i=1}^{2} v_i \, dz_{it} \right\} \\ &+ \frac{1}{\bar{\tau}} \int_0^{\bar{\tau}} \vartheta_t(\tau) B_t(\tau) \left\{ \left(r_t + \sum_{i=1}^{2} \lambda_{it} \sigma_i(\tau) \right) dt + \sum_{i=1}^{2} \sigma_i(\tau) \, dz_{it} \right\} d\tau \\ &- \frac{1}{\bar{\tau}} \int_0^{\bar{\tau}} \zeta_t(\tau) L_t(\tau) \left\{ \left(r_t + \sum_{i=1}^{2} \lambda_{it} \sigma_i(\tau) - \iota' \right) dt + \sum_{i=1}^{2} \sigma_i(\tau) \, dz_{it} \right\} d\tau - (\varepsilon \Psi_t W_t + c_t) dt \end{aligned} \tag{A.10}$$

上式に $\vartheta_t(\tau) B_t(\tau) = \varphi_t(\tau) W_t$、$\zeta_t(\tau) L_t(\tau) = \psi_t(\tau) W_t$ を代入し、整理すると、次式を得る。

$$\begin{aligned} dW_t = W_t \Bigg\{ &\left(r_t + \sum_{i=1}^{2} v_i \lambda_{it} \right) dt + \sum_{i=1}^{2} v_i \, dz_{it} \\ &+ \frac{1}{\bar{\tau}} \int_0^{\bar{\tau}} \left(\sum_{i=1}^{2} \Big(\varphi_t(\tau) - \psi_t(\tau) \Big) \Big(\sigma_i(\tau) - v_i \Big) \lambda_{it} + \iota' \psi_t(\tau) \right) d\tau \, dt \\ &+ \sum_{i=1}^{2} \left(\frac{1}{\bar{\tau}} \int_0^{\bar{\tau}} \Big(\sigma_i(\tau) - v_i \Big) d\tau \right) dz_{it} \Bigg\} - (\varepsilon \Psi_t W_t + c_t) dt \end{aligned} \tag{A.11}$$

さらに、上式を整理すると、(2.15) 式が得られる。

A.3　命題 1 の証明

先ず、値関数 (3.19) 式に偏微分を施すと、次の式群を得る。

$$W_t V_W = (1-\gamma)V, \quad W_t^2 V_{WW} = -\gamma(1-\gamma)V, \quad V_r = \gamma\frac{H_r}{H}V, \quad V_{\bar r} = \gamma\frac{H_{\bar r}}{H}V,$$
$$W_t V_{Wr} = \gamma(1-\gamma)\frac{H_r}{H}V, \quad W_t V_{W_t \bar r} = \gamma(1-\gamma)\frac{H_{\bar r}}{H}V,$$
$$V_{rr} = \gamma\left\{\frac{H_{rr}}{H} + (\gamma-1)\left(\frac{H_r}{H}\right)^2\right\}V, \quad V_{\bar r\bar r} = \gamma\left\{\frac{H_{\bar r\bar r}}{H} + (\gamma-1)\left(\frac{H_{\bar r}}{H}\right)^2\right\}V,$$
$$V_{r\bar r} = \gamma\left\{\frac{H_{r\bar r}}{H} + (\gamma-1)\left(\frac{H_r}{H}\right)\left(\frac{H_{\bar r}}{H}\right)\right\}V \quad \text{(A.12)}$$

Π_t^* は次式を満たしていることに留意しておく。

$$\Pi_{it}^* = -\frac{q_i(Y_t)}{W_t p(Y_t)} \qquad i = 1, 2 \quad \text{(A.13)}$$

値関数の偏微分結果 (A.12) を (3.15)(3.17)(3.18) 式に代入すると、(A.14)-(A.16) 式を得る。

$$W_t p(Y_t) = (\gamma-1)(\gamma+\delta)V \quad \text{(A.14)}$$
$$q_1(Y_t) = \left\{(1-\gamma)\lambda_{1t} + \gamma(1-\gamma-\delta)\left(-\sigma\frac{H_r}{H} - \bar\rho_1\bar\sigma\frac{H_{\bar r}}{H}\right)\right\}V \quad \text{(A.15)}$$
$$q_2(Y_t) = \left\{(1-\gamma)\lambda_{2t} + \gamma(1-\gamma-\delta)\left(-\bar\rho_1\bar\sigma\frac{H_{\bar r}}{H}\right)\right\}V \quad \text{(A.16)}$$

(A.13) 式に (A.14)-(A.16) 式を代入すると、(3.20)(3.21) 式を得る。

値関数 V の偏微分方程式 (3.16) における Π_i^* 関連項は (A.14)-(A.16) 式を用いると、次のように整理される。

$$-\frac{1}{2}\frac{q_1^2(Y_t)}{W_t p(Y_t)} = -\frac{1}{2(\gamma-1)(\gamma+\delta)}\left((1-\gamma)\lambda_{1t} + \gamma(\gamma+\delta-1)\sigma\frac{H_r}{H} + \gamma(\gamma+\delta-1)\bar\rho_1\bar\sigma\frac{H_{\bar r}}{H}\right)^2 V$$
$$= -\frac{1}{2(\gamma-1)(\gamma+\delta)}\left\{(\gamma-1)^2\lambda_{1t}^2 + \gamma^2(\gamma+\delta-1)^2\left(\sigma^2\left(\frac{H_r}{H}\right)^2 + \bar\rho_1^2\bar\sigma^2\left(\frac{H_{\bar r}}{H}\right)^2\right)\right.$$
$$\left.-2\gamma(\gamma-1)(\gamma+\delta-1)\lambda_{1t}\left(\sigma\left(\frac{H_r}{H}\right) + \bar\rho_1^2\bar\sigma^2\lambda_{1t}\left(\frac{H_{\bar r}}{H}\right)\right) + 2\gamma^2(\gamma+\delta-1)^2\bar\rho_1\sigma\bar\sigma\left(\frac{H_r}{H}\right)\left(\frac{H_{\bar r}}{H}\right)\right\}$$
$$= -\frac{\gamma-1}{2(\gamma+\delta)}\lambda_{1t}^2 - \frac{\gamma^2(\gamma+\delta-1)^2}{2(\gamma-1)(\gamma+\delta)}\left(\sigma^2\left(\frac{H_r}{H}\right)^2 + \bar\rho_1^2\bar\sigma^2\left(\frac{H_{\bar r}}{H}\right)^2 - \bar\rho_1\sigma\bar\sigma\left(\frac{H_r}{H}\right)\left(\frac{H_{\bar r}}{H}\right)\right)$$
$$\left. + \frac{\gamma(\gamma+\delta-1)}{\gamma+\delta}\lambda_{1t}\left(\sigma\left(\frac{H_r}{H}\right) + \bar\rho_1\bar\sigma\left(\frac{H_{\bar r}}{H}\right)\right)\right\} \quad \text{(A.17)}$$

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{2}\frac{q_2^2(Y_t)}{W_t p(Y_t)} &= -\frac{1}{2(\gamma-1)(\gamma+\delta)}\left((1-\gamma)\lambda_{2t}+\gamma(\gamma+\delta-1)\bar{\rho}_2\bar{\sigma}\frac{H_{\bar{r}}}{H}\right)^2 V \\
&= -\frac{1}{2(\gamma-1)(\gamma+\delta)}\left\{(\gamma-1)^2\lambda_{2t}^2+\gamma^2(\gamma+\delta-1)^2\bar{\rho}_2^2\bar{\sigma}^2\left(\frac{H_{\bar{r}}}{H}\right)^2\right. \\
&\qquad\left. -2\gamma(\gamma-1)(\gamma+\delta-1)\bar{\rho}_2\bar{\sigma}\lambda_{2t}\left(\frac{H_{\bar{r}}}{H}\right)\right\} \\
&= -\frac{(\gamma-1)}{2(\gamma+\delta)}\lambda_{2t}^2-\frac{\gamma^2(\gamma+\delta-1)^2}{2(\gamma-1)(\gamma+\delta)}\bar{\rho}_2^2\bar{\sigma}^2\left(\frac{H_{\bar{r}}}{H}\right)^2+\frac{\gamma(\gamma+\delta-1)}{\gamma+\delta}\bar{\rho}_2\bar{\sigma}\lambda_{2t}\left(\frac{H_{\bar{r}}}{H}\right)
\end{aligned}
\tag{A.18}
$$

このとき、(A.12)(A.17)(A.18) 式を用いると、V の偏微分方程式 (3.16) における

$$
\sigma^2\left(\frac{H_r}{H}\right)^2, \bar{\sigma}^2\left(\frac{H_{\bar{r}}}{H}\right)^2, \bar{\rho}_1\sigma\bar{\sigma}\left(\frac{H_r}{H}\right)\left(\frac{H_{\bar{r}}}{H}\right) \tag{A.19}
$$

の係数は共通で次のように計算される。

$$
\begin{aligned}
&\frac{\gamma(\gamma-1)}{2}-\frac{\gamma^2(\gamma+\delta-1)^2}{2(\gamma-1)(\gamma+\delta)}+\frac{\gamma\delta}{2(\gamma-1)} \\
&\qquad = \frac{\gamma\left\{(\gamma-1)^2(\gamma+\delta)-\gamma(\gamma+\delta-1)^2+\gamma\delta(\gamma+\delta)\right\}}{2(\gamma-1)(\gamma+\delta)} \\
&\qquad = \frac{\gamma\delta}{2(\gamma-1)(\gamma+\delta)}
\end{aligned}
\tag{A.20}
$$

値関数 V の偏微分方程式 (3.16) における主要利害関係者報酬過程 c 関連項は、最適主要利害関係者報酬 (3.12) 式を代入し、(A.12) 式を用いると、

$$
-c^* + \frac{c^{*1-\gamma}}{1-\gamma} = \gamma\frac{V}{H} \tag{A.21}
$$

を得る。

(A.12) 式、(A.17)(A.18) 式、(A.20)(A.21) 式を V の偏微分方程式 (3.16) に代入し整理すると、(3.22) 式が得られる。

A.4 命題 3 の証明

先ず、(4.13)-(4.16) 式を示す。a_{12} については、(4.4) 式を σ^2 で除し、近似式 (4.1) を用いて整理すると、次式を得る。

$$
\left(\frac{\gamma(\gamma+\delta-1)}{(\gamma-1)(\gamma+\delta)}a_{11}-\frac{\tilde{h}_1+\kappa+\bar{\kappa}}{\sigma^2}\right)a_{12} \approx -\frac{\kappa}{\sigma^2}a_{11} \tag{A.22}
$$

上式左辺の a_{11} に (4.8) 式を代入し整理すると、次式を得る。

$$
a_{12} \approx -\frac{\kappa}{\kappa-\bar{\kappa}}a_{11} \tag{A.23}
$$

上式に近似式 (4.1) を適用すると、(4.13) 式が得られる。

a_{22} については、(4.3) 式を σ^2 で除し、近似式 (4.1) を用いると、次式を得る。

$$\frac{\tilde{h}_1 + 2\bar{\kappa}}{\sigma^2} a_{22} \approx \left(\frac{\gamma(\gamma+\delta-1)}{(\gamma-1)(\gamma+\delta)} a_{12} + \frac{2\kappa}{\sigma^2} \right) a_{12} \tag{A.24}$$

上式右辺括弧内の a_{12} に (4.13) 式を代入し、(4.8) 式と近似式 (4.1) を用いると、次のように計算される。

$$\begin{aligned} a_{22} &\approx \frac{1}{\tilde{h}_1 + 2\bar{\kappa}} \left\{ -(\tilde{h}_1 + 2\kappa) \left(1 + \frac{\bar{\kappa}}{\kappa} \right) + 2\kappa \right\} a_{12} \\ &= \frac{1}{\tilde{h}_1 + 2\bar{\kappa}} \left\{ -\tilde{h}_1 \left(1 + \frac{\bar{\kappa}}{\kappa} \right) - 2\bar{\kappa} \right\} a_{12} \\ &\approx -\frac{1}{\tilde{h}_1 + 2\bar{\kappa}} \left\{ \tilde{h}_1 \left(1 + \frac{\bar{\kappa}}{\kappa} \right) + 2\bar{\kappa} \left(1 + \frac{\bar{\kappa}}{\kappa} \right) \right\} a_{12} \end{aligned}$$

上式と (4.13) 式から (4.14) 式が得られる。

a_1 については、(4.5) 式を σ^2 で除し、近似式 (4.1) を用いると、次式を得る。

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\gamma(\gamma+\delta-1)}{(\gamma-1)(\gamma+\delta)} a_{11} - \frac{\tilde{h}_1 + \kappa}{\sigma^2} \right) a_1 \\ &\approx -\frac{1}{\sigma^2} \left(\frac{\gamma+\delta-1}{\gamma+\delta} \Big(\sigma\lambda_1 a_{11} + \bar{\rho}_2 \bar{\sigma} \lambda_2 a_{12} \Big) + \bar{\kappa}\bar{r}\, a_{12} - \frac{(\gamma-1)(1+\iota\Psi_2)}{\gamma} \right) \end{aligned} \tag{A.25}$$

上式に (4.13) 式と (4.8) 式を適宜代入し、近似式 (4.1) を用いて整理すると、(4.15) 式が得られる。

a_2 については、(4.6) 式を σ^2 で除し、(4.8)(4.13) 式と近似式 (4.1) を用いると、次式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{h}_1 + \bar{\kappa}}{\sigma^2} a_2 &\approx \frac{1}{\sigma^2} \left\{ -\left(1 + \frac{\bar{\kappa}}{\kappa} \right) (\tilde{h}_1 + 2\kappa) + \kappa) \right\} a_1 \\ &\quad + \frac{1}{\sigma^2} \left(\frac{\gamma+\delta-1}{\gamma+\delta} \Big(\sigma\lambda_1 - \bar{\rho}_2 \bar{\sigma} \lambda_2 \Big) a_{12} + \frac{(\gamma-1)\iota\Psi_2}{\gamma} + \bar{\kappa}\bar{r}\, a_{22} \right) \end{aligned} \tag{A.26}$$

上式から (4.16) 式を得る。

次に、(4.18)(4.19) 式を示す。(3.36) 式右辺第 2 項の

$$k_1(r_t, \bar{r}_t) := -\Big(\sigma a_1 + \bar{\rho}_1 \bar{\sigma} a_2 \Big) - \Big(\sigma a_{11} + \bar{\rho}_1 \bar{\sigma} a_{12} \Big) r_t - \Big(\sigma a_{12} + \bar{\rho}_1 \bar{\sigma} a_{22} \Big) \bar{r}_t \tag{A.27}$$

を計算する。上式の (a_1, a_{11}, a_{12}) に (4.15)(4.8)(4.13) 式を代入し、近似式 (4.1)

を用いると、次式を得る。

$$
\begin{aligned}
k_1(r_t,\bar{r}_t) \approx \left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)&\left\{\frac{(\tilde{h}_1+2\kappa)(\sigma\lambda_1-\bar{\rho}_2\bar{\sigma}\lambda_2)-(1+\iota\Psi_2)\sigma^2}{\kappa\sigma}-\frac{\iota\Psi_2\bar{\rho}_1\bar{\sigma}}{\tilde{h}_1+\bar{\kappa}}\right\}\\
&-\frac{\bar{\kappa}}{\kappa}\sigma a_{11}\bar{r}-\frac{(\gamma-1)(\gamma+\delta)}{\gamma(\gamma+\delta-1)}\frac{\tilde{h}_1+2\kappa}{\sigma}r_t\\
&+\left(1+\frac{\bar{\kappa}}{\kappa}\right)\frac{(\gamma-1)(\gamma+\delta)}{\gamma(\gamma+\delta-1)}\frac{\tilde{h}_1+2\kappa}{\sigma}\bar{r}_t
\end{aligned}
\tag{A.28}
$$

上式に (4.8) 式を代入すると、(4.18) 式が得られる。

(3.37) 式右辺第 2 項の

$$
k_2(r_t,\bar{r}_t) := -\bar{\rho}_2\bar{\sigma}\Big(a_2+a_{12}r_t+a_{22}\bar{r}_t\Big) \tag{A.29}
$$

を計算する。上式の (a_2,a_{12},a_{22}) に (4.16)(4.13)(4.14) 式を代入し、(4.15) 式と近似式 (4.1) を用いると、次式のように展開出来る。

$$
\begin{aligned}
k_2(r_t,\bar{r}_t) &\approx -\bar{\rho}_2\bar{\sigma}\left[\frac{1}{\tilde{h}_1+\bar{\kappa}}\left\{\Big(-(\tilde{h}_1+\kappa)\Big)\left\{-\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)\left(\frac{(\tilde{h}_1+2\kappa)\sigma\lambda_1-(1+\iota\Psi_2)\sigma^2}{\kappa\sigma^2}\right)\right\}\right.\right.\\
&\left.\left.\quad-\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)\frac{(\tilde{h}_1+2\kappa)\sigma\lambda_1}{\sigma^2}+\frac{(\gamma-1)\iota\Psi_2}{\gamma}\right\}-a_{11}r_t+a_{11}\bar{r}_t\right]\\
&=\bar{\rho}_2\bar{\sigma}\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)\left(\frac{1}{\tilde{h}_1+\bar{\kappa}}\right)\left\{-(\tilde{h}_1+\kappa)\left(\frac{(\tilde{h}_1+2\kappa)\sigma\lambda_1-(1+\iota\Psi_2)\sigma^2}{\kappa\sigma^2}\right)+\frac{(\tilde{h}_1+2\kappa)\sigma\lambda_1}{\sigma^2}-\iota\Psi_2\right\}\\
&\quad+\bar{\rho}_2\bar{\sigma}a_{11}(r_t-\bar{r}_t)\\
&=\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)\left\{\frac{-\tilde{h}_1(\tilde{h}_1+2\kappa)\lambda_1+(1+\iota\Psi_2)(\tilde{h}_1+\kappa)\sigma-\iota\Psi_2\kappa\sigma}{\kappa(\tilde{h}_1+\bar{\kappa})\sigma}\right\}\bar{\rho}_2\bar{\sigma}\\
&\quad+\frac{(\gamma-1)(\gamma+\delta)}{\gamma(\gamma+\delta-1)}\frac{(\tilde{h}_1+2\kappa)\bar{\rho}_2\bar{\sigma}}{\sigma^2}(r_t-\bar{r}_t)
\end{aligned}
\tag{A.30}
$$

上式から、(4.19) 式が得られる。

最後に、(4.20)(4.21) 式を示す。補題 1 における (b_1,b_2) の常微分方程式 (2.7) に $\lambda_{i1}=\lambda_{i2}=0\ (i=1,2)$ を代入すると、(b_1,b_2) は次の連立常微分方程式の解である。

$$
\frac{d}{dt}b_1(t)=\kappa b_1(t)-1 \tag{A.31}
$$

$$
\frac{d}{dt}b_2(t)=-\kappa b_1(t)+\bar{\kappa}b_2(t) \tag{A.32}
$$

(A.31) 式は線形微分方程式であるから、定数変化法を用いると、境界条件から、

$$
b_1(t)=\frac{1}{\kappa}\Big(1-e^{-\kappa(T-t)}\Big) \tag{A.33}
$$

と解ける。上式を (A.32) 式に代入すると、これも線形微分方程式であるから、定数変化法と境界条件を用いて、次のように解ける。

$$b_2(t) = \frac{1}{\bar{\kappa}}\left(1 - e^{-\bar{\kappa}(T-t)}\right) + \frac{1}{\kappa - \bar{\kappa}}\left(e^{-\kappa(T-t)} - e^{-\bar{\kappa}(T-t)}\right) \tag{A.34}$$

(A.33)(A.34) 式を補題 1 の (2.6) 式に代入すると、(4.20)(4.21) 式が得られる。