CRR DISCUSSION PAPER SERIES　J

Discussion Paper No. J-38

頑健効用に基づく消費と債券投資の多期間最適化

楠田　浩二

2013 年 4 月

Center for Risk Research
Faculty of Economics
SHIGA UNIVERSITY

1-1-1 BANBA, HIKONE,
SHIGA 522-8522, JAPAN

滋賀大学経済学部附属リスク研究センター
〒522-8522 滋賀県彦根市馬場 1-1-1

CRR DISCUSSION PAPER SERIES J

Discussion Paper No. J-38

頑健効用に基づく消費と債券投資の多期間最適化

楠田　浩二[1]

2013 年 4 月

Center for Risk Research
Faculty of Economics
SHIGA UNIVERSITY
1-1-1 BANBA, HIKONE,
SHIGA 522-8522, JAPAN

滋賀大学経済学部附属リスク研究センター
〒 522-8522 滋賀県彦根市馬場 1-1-1

キーワード: 確率制御、頑健効用、近似解析解、金利リスク、債券投資、多期間最適ポートフォリオ、ナイトの不確実性

JEL 分類番号: C62、D14、G11

概 要

消費と債券投資の多最適化問題において、Campbell and Viceira (2002) は相対的危険回避度一定の期待効用と金利のバシチェック・モデルを仮定し低次の近似解析解を導出し、楠田 (2013) は同問題に対し高次の近似解析解を導出している。本稿では、同問題にナイトの不確実性を導入し、「相似変換型頑健効用」（Maenhout (2004)）を仮定して、低次と高次の近似解析解を導出する。高次の解における長期債への投資比率において、ナイトの不確実性が存在しない場合の相対的危険回避度の項が相対的危険回避度と「相対的曖昧性回避度」の和に置き換わることが示される。

[1]本稿は滋賀大学経済学部附属リスク研究センター東アジア保険プロジェクトにおける中国東北財経大学金融学院との共同研究の成果の一部である。

1 序論

安全性を重視する個人投資家向けの投資信託や長期債務を有する外資系生保等の機関投資家は短期債・長期債中心の運用を行っている場合が少なくないことを考慮すると、消費と短期債・長期債投資の最適化問題の考察は経済学的意義がある。Campbell and Viceira (2002) は、短期債と満期までの期間が一定の長期債を投資対象とする消費と投資の多期間最適化問題を相対的危険回避度一定の期待効用関数と金利のバシチェック・モデルを仮定して確率制御の手法で解いている。その結果、最適ポートフォリオの導出は金利の未知関数に関する非斉次の常微分方程式の求解問題に帰着されている。彼等は同常微分方程式の非斉次項を対数線形近似し、近似解析解を与えている。彼等の近似解析解における長期債への最適投資比率は金利に依存しないが、かかる結果は、低金利局面では短期債から長期債へ、高金利局面では長期債から短期債へ移行する現実の投資行動を説明出来ない。最近になって、楠田 (2013) は Campbell and Viceira (2002) よりも高次の近似解析解を導いている。高次の近似解析解では、長期債の最適近似投資比率は、低金利局面では上昇し高金利局面では低下することを示しており、現実に観察される投資行動を説明している。

これらのモデルでは、投資家は経済諸事象の生起確率に絶対的な信を置いている。しかし、Knight (1921) は、殆ど全ての経済事象の生起確率が未知であることを指摘し、生起確率既知の不確実性と生起確率未知の不確実性を峻別し、前者を「危険 (risk)」、後者を「真の不確実性」(以下、「ナイトの不確実性」と呼ぶ)と呼んでいる。こうしたナイトの不確実性を織り込みながら、効用汎関数最大化の解析的取り扱い易さを相当程度確保した効用として、Anderson, Hansen, and Sargent (2003) 等により「頑健効用 (robust utility)」が提案されている。頑健効用を有する投資家は、尤も有り得べき確率(参考確率)を想定しつつも、これに絶対的な信を置けないことから、参考確率と等価なあらゆる確率を代替確率の候補として想定している。同投資家は、慎重を期して、各消費計画に対し期待効用を最小化する最悪の場合の確率(以下、「最悪確率」)を想定しようとするが、無制限な最小化は到底有り得ない「杞憂」とも言うべき最悪確率を想定することとなり不合理である。そこで、頑健効用では、最小化の対象を、通常の期待効用に最悪確率と参考確率の乖離を表す「相対エントロピー」を加えたものとすることによって、合理的な最悪確率の想定を企図している。

本稿では、最初に頑健効用を仮定して、確率制御における Hamilton-Jacobi-Bellman 方程式を導出するが、同方程式は解析的に解けない。また、頑健効用は「曖昧性回避度 (coefficient of umbiguity aversion)」が状態変数に独立なほか、効用関数の有すべき望ましい性質とされる「相似変換性 (homotheticity)」を有していない、という効用関数自体としての問題点も抱えている。Maenhout (2004) は頑健効用における「曖昧性回避度」を状態変数に依存出来るように

頑健効用を一般化した「一般化頑健効用族」と同効用族において「相似変換性」を有するように特定化された「相似変換型頑健効用」を提案している。本稿では、「相似変換型頑健効用 (homothetic robust utility)」を仮定し、消費と投資の最適化問題の低次と高次の近似解析解を導出する。

主要な結果は次の通りである。楠田 (2013) により、ナイトの不確実性が存在しない場合の高次の解における長期債の投資比率は、近視眼的需要項と保険需要項に分解され、さらに保険需要項は金利に独立な項と金利に依存する項に分解されることは示されている。また、近視眼的需要項と金利に独立な保険需要項は相対的危険許容度によって重み付けられた加重平均となることが示されている。本稿では、相似変換型頑健効用下の高次の解における長期債の投資比率もナイトの不確実性が存在しない場合と関数形は一致するが、加重平均の重みである相対的危険許容度の項が相対的危険回避度と「相対的曖昧性回避度」の和の逆数に取って代わることが示される。危険と曖昧性を総称して「不確実性」と呼ぶのであれば、相対的危険回避度と「相対的曖昧性回避度」の和を「相対的不確実性回避度」、その逆数を「相対的不確実性許容度」と呼ぶのは自然であろう。かかる概念を用いることが許されるのであれば、長期債の最適投資比率における加重平均の重みは、ナイトの不確実性が存在しない場合の相対的許容度から相似変換型頑健効用下の「相対的不確実性許容度」へ置き換わることが示された、と表現出来る。そして、同結果は、ナイトの不確実性への考慮が目先（近視眼的需要）よりも遠い将来（保険需要）を重視させている、と自然に解釈される。

本稿の次章以降の構成は以下の通りである。2 章では、Campbell and Viceira (2002) による消費と債券投資の多期間最適化問題、近似解析法、低次の近似解析解、楠田 (2013) による高次の近似解析解を紹介する。3 章では、Anderson, Hansen, and Sargent (2003) の頑健効用と Maenhout (2004) の一般化頑健効用による消費と債券投資の最適化問題の解法を説明する。4 章では、一般化頑健効用族において「相似変換型頑健効用」（Maenhout (2004)）を仮定して、消費と債券投資の最適化問題の低次と高次の近似解析解を示す。

2　ナイトの不確実性が存在しない場合の消費と債券投資の最適化問題の近似解析解

本章では、Campbell and Viceira (2002) が考察した消費と債券投資の最適化問題、彼等が提示した近似解析法、彼等が導出した低次の近似解析解、楠田 (2013) が提示した高次の近似解析解を順に紹介する。

2.1 環境

無限連続時間の摩擦の無い証券市場経済を考察する。投資家の共通主観確率と情報構造は完備フィルター付き確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$ によりモデル化されている。ここで、$\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbf{T}}$ は標準ブラウン運動 z によって生成される自然なフィルトレーションである。P の下での期待作用素を E と表記する。

一種類の消費財、安全証券、割引債が任意の時点で市場で取引されている。割引債は任意の時点で発行され、発行時点の満期までの期間は τ とする。安全証券の価格を B、満期 T の割引債の価格を B^T と表記する。消費財空間は、消費過程 c が $\int_0^\infty c_t dt < \infty \quad a.s.$ を満たす非負値適合的過程の空間とする。

金利の変動過程については、金利が平均回帰傾向を有することを織り込んだ瞬間的スポット・レート・モデルであるバシチェック・モデルを仮定する。

仮定 1. 瞬間的スポット・レート r は次の *Ornstein-Uhlenbeck* 過程に従う。

$$dr_t = \kappa(\bar{r} - r_t)\, dt + \sigma\, dz_t$$

ここで、κ は平均金利への回帰速度、$\bar{r}$ は平均金利、σ は拡散係数をそれぞれ表す正の定数である。

このとき、割引債の Sharpe 測度 λ は満期に依らず一定であり、満期 T の割引債価格のヴォラティリティは $\kappa^{-1}(1 - e^{-\kappa(T-t)})\sigma$ であることが示されている（Vasicek (1977)）。従って、割引債の Sharpe 測度を λ、$b(T-t) = \kappa^{-1}(1 - e^{-\kappa(T-t)})$ と表記すると、安全証券の価格 B と満期 T の割引債の価格 B^T は次の確率微分方程式に従う。

$$\frac{dB_t}{B_t} = r_t\, dt \tag{2.1}$$

$$\frac{dB_t^T}{B_t^T} = \{r_t + \lambda b(T-t)\sigma\}\, dt - b(T-t)\sigma\, dz_t \tag{2.2}$$

以下では、安全証券を「短期債」、割引債を「長期債」と呼ぶ。

本章では、投資家の効用汎関数は相対的危険回避度一定の期待効用汎関数と仮定する。

仮定 2. 投資家の効用汎関数は次式で表される相対的危険回避度一定の期待効用汎関数である。

$$u(c) = E\left[\int_0^\infty e^{-\rho t} \frac{c_t^{1-\gamma}}{1-\gamma}\, dt\right]$$

ここで、ρ は割引率、γ は相対的危険回避度をそれぞれ表す正の定数である。

2.2 確率制御による解法

投資家は初期時点の金利 r を所与として与えられた富 w を短期債と新規発行長期債（満期までの期間 τ）のみに投資することによって効用関数を最大

化する問題を解く。初期状態を $y=(w,r)$、富に対する新発長期債投資の比率の過程を φ と表記する。所与の投資比率過程 φ の下、富過程 W は次の予算制約式を満たす。

$$dW_t = \{(r_t + \varphi_t \lambda b(T-t)\sigma)W_t - c_t\}\,dt - \varphi_t b(T-t)\sigma W_t\,dz_t \tag{2.3}$$

予算制約式 (2.3) を満たす消費財・投資比率過程 (c,φ) を初期状態 y に対する許容的制御と呼び、許容的制御の集合を $\mathcal{C}(y)$ と表記する。このとき、最適投資問題は次式で定義される値関数 $V(y)$ の解析解を求める問題となる。

$$V(y) = \sup_{(c,\varphi)\in\mathcal{C}(y)} u(c) \tag{2.4}$$

本問題 (2.4) は次の Hamilton-jacobi-Bellman 方程式（以下、「HJB 方程式」）を解く問題に帰着される。

$$\sup_{(c,\varphi)}\left[\mathcal{D}^{(c,\varphi)}V(w,r) - \rho V(w,r) + \frac{c^{1-\gamma}}{1-\gamma}\right] = 0 \tag{2.5}$$

s.t. 横断条件

$$\lim_{T\to\infty} E[\,e^{-\rho T}V(W_T, r_T)\,] = 0 \tag{2.6}$$

ここで、

$$\begin{aligned}\mathcal{D}^{(c,\varphi)}V(w,r) = \{(r+\varphi\lambda b\sigma)w - c\}V_w + \kappa(\bar{r}-r)V_r& \\ +\frac{1}{2}\varphi^2 w^2 b^2 \sigma^2 V_{ww} - \varphi w b \sigma^2 V_{wr} + \frac{1}{2}\sigma^2 V_{rr}&\end{aligned} \tag{2.7}$$

HJB 方程式 (2.5) における最大化の 1 階の条件から最適消費・最適投資比率 (c^*, φ^*) は次式のように表される。

$$c^* = V_w^{-\frac{1}{\gamma}} \tag{2.8}$$

$$\varphi^* = -\frac{V_w}{wV_{ww}}\frac{\lambda}{b\sigma} + \frac{V_{wr}}{wV_{ww}}\frac{1}{b} \tag{2.9}$$

上式を HJB 方程式に代入して得られる 2 階の偏微分方程式から値関数が次の関数形をとることが容易に推測される。

$$V(w,r) = \big(H(r)\big)^{\gamma}\frac{w^{1-\gamma}}{1-\gamma} \tag{2.10}$$

このとき、HJB 方程式の左辺の被最大化関数を $g(c,\varphi)$ と置くと、最大化の 2 階の条件も満たされていることが確認出来る。(2.10) 式を HJB 方程式に代入して整理すると、次の常微分方程式が得られる。

$$\begin{aligned}\frac{\gamma\sigma^2}{2}\left(\frac{H''}{H}\right) + \{\gamma\kappa(\bar{r}-r) - (1-\gamma)\lambda\sigma\}\left(\frac{H'}{H}\right)& \\ +\left(\frac{(1-\gamma)\lambda^2}{2\gamma} + (1-\gamma)r - \rho\right) + \gamma\left(\frac{1}{H}\right) = 0&\end{aligned} \tag{2.11}$$

2.3 常微分方程式の非斉次項近似

常微分方程式 (2.11) は非斉次であるが、解析解が示されている（Polyanin and Zaitsev (1995)）。しかし、Campbell and Viceira (2002) が指摘するように、同解析解は解釈が非常に困難なガンマ関数を含む複雑な式である。そこで、Campbell and Viceira (2002) は非斉次項を次の手順で対数線形近似している。まず、(2.9) 式と値関数 (2.10) から次の関係式が成立している。

$$\frac{1}{H(r_t)} = \frac{c_t}{W_t} \tag{2.12}$$

従って、$1/H(r_t)$ を次のように $\lim_{t\to\infty} E[\log c_t - \log W_t]$ の周りで[1]対数線形近似する。

$$\frac{1}{H(r_t)} \approx h_0 - h_1 \log H(r_t) \tag{2.13}$$

ここで、$h_0 = h_1(1 - \log h_1)$、

$$h_1 = \exp\Big(\lim_{t\to\infty} E\Big[\log\Big(\frac{c_t}{W_t}\Big)\Big]\Big) \tag{2.14}$$

(2.13) 式を常微分方程式の最終項に代入すると、次の近似常微分方程式が得られる。

$$\begin{aligned}\frac{\gamma\sigma^2}{2}\left(\frac{H''}{H}\right) + \{\gamma\kappa(\bar{r} - r) - (1-\gamma)\lambda\sigma\}\left(\frac{H'}{H}\right) \\ + \left(\frac{(1-\gamma)\lambda^2}{2\gamma} + (1-\gamma)r - \rho\right) + \gamma(h_0 - h_1 \log H) = 0\end{aligned} \tag{2.15}$$

2.4 低次と高次の近似解析解

近似常微分方程式 (2.15) の解が次式で表される 2 次関数の指数関数であることは容易に推測される。

$$H(r_t) = \exp\left(a_0 + a_1 r_t + \frac{1}{2} a_2 r_t^2\right) \tag{2.16}$$

上式を近似常微分方程式 (2.15) に代入すると、次式が得られる。

$$\begin{aligned}&\frac{\gamma\sigma^2}{2}(a_2 + a_1^2 + 2a_1 a_2 r + a_2^2 r^2) + \{\gamma\kappa(\bar{r} - r) - (1-\gamma)\lambda\sigma\}(a_1 + a_2 r) \\ &+ \frac{(1-\gamma)\lambda^2}{2\gamma} + (1-\gamma)r - \rho + \gamma h_0 - \gamma h_1\left(a_0 + a_1 r + \frac{1}{2}a_2 r^2\right) = 0\end{aligned} \tag{2.17}$$

[1]Campbell and Viceira (2002) は $E[\log c_t - \log W_t]$ の周りで対数線形近似を行っている。しかし、この場合、$E[\log c_t - \log W_t]$ は r と r_t に依存する。そこで、一定値をとる $\lim_{t\to\infty} E[\log c_t - \log W_t]$ の周りで対数線形近似を行っている。

上式は金利 r に関する恒等式であるから、整理すると、次の (a_0, a_1, a_2) に関する連立方程式を得る。

$$\sigma^2 a_2^2 - (h_1 + 2\kappa)a_2 = 0 \tag{2.18}$$

$$\gamma\{\sigma^2 a_2 - (h_1 + \kappa)\}a_1 + \{\gamma\kappa\bar{r} - (1-\gamma)\lambda\sigma\}a_2 + 1 - \gamma = 0 \tag{2.19}$$

$$\frac{\gamma\sigma^2}{2}(a_1^2 + a_2) + \{\gamma\kappa\bar{r} - (1-\gamma)\lambda\sigma\}a_1 + \frac{(1-\gamma)\lambda^2}{2} - \rho + \gamma h_0 - \lambda h_1 a_0 = 0 \tag{2.20}$$

(2.18) 式より、$a_2 = 0$、或いは

$$a_2 = \frac{h_1 + 2\kappa}{\sigma^2} \tag{2.21}$$

以下では、$a_2 = 0$ に対応する解を「低次の解」、(2.21) 式に対応する解を「高次の解」と呼ぶ。なお、常微分方程式が非斉次であるため、低次の解と高次の解は重ね合わせられない。それでは、何れが値関数を最大化する真の解の近似解であるのだろうか。これはパラメータに依存する複雑な評価となるため、実証分析によるパラメータ推定の結果を待つ必要がある。

低次の解については、Campbell and Viceira (2002) で次のように導出されている。先ず、$a_2 = 0$ を (2.19) 式に代入すると、

$$a_1 = -\left(\frac{\gamma - 1}{\gamma}\right)\frac{1}{h_1 + \kappa} \tag{2.22}$$

となる。a_0 は上式を (2.20) 式に代入して得られ、(h_0, h_1) は次の連立方程式を数値解法により求められる。

$$h_0 = h_1(1 - \log h_1) \tag{2.23}$$

$$h_1 = \exp\left(-a_0 - a_1\bar{r} - \frac{1}{2}a_2\left(\frac{\sigma^2}{2\kappa} + \bar{r}^2\right)\right) \tag{2.24}$$

その結果、長期債の近似最適投資比率は次のようになる。

$$\varphi_t^* = \frac{1}{\gamma}\frac{\lambda}{b\sigma} + \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)\frac{1}{b(h_1 + \kappa)} \tag{2.25}$$

留意点 1. 低次の解における長期債の最適投資比率 *(2.25)* をみると、長期債の需要が将来の金利変動に伴う投資機会集合の変化を考慮しない第 *1* 項の近視眼的需要と同変化に対し保険を掛ける第 *2* 項の保険需要から成っている。また、最適投資比率は、近視眼的需要項における $\lambda/(b\sigma)$ と保険需要項における $1/(b(h_1 + \kappa))$ に対しそれぞれを相対的危険許容度 $1/\gamma$ と *1* から相対的危険許容度を差し引いた値で重み付けた加重平均となっている。ただ、両項とも金利に依存していないため、金利低下局面では短期債から長期債へ、金利上昇局面では長期債から短期債へ移行する現実の投資行動は説明出来ない。

高次の解については、楠田 (2013) で以下のように導出されている。先ず、(2.21) 式を (2.19) 式に代入すると、

$$a_1 = -\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)\frac{\lambda(h_1+2\kappa)-\sigma}{\kappa\sigma} - \frac{h_1+2\kappa}{\sigma^2}\bar{r} \tag{2.26}$$

と求まり、$a_0, (h_0, h_1)$ を同様にして求めると、高次の解に対応する近似値関数、近似最適消費、長期債の近似最適投資比率が次のようになる。

$$V(W_t, r_t) = \exp\left[\gamma\left\{a_0 + a_1 r_t + \frac{h_1+2\kappa}{2\sigma^2}r_t^2\right\}\right]\frac{W_t^{1-\gamma}}{1-\gamma} \tag{2.27}$$

$$c_t^* = \exp\left(-a_0 - a_1 r_t - \frac{h_1+2\kappa}{2\sigma^2}r_t^2\right)W_t \tag{2.28}$$

$$\varphi_t^* = \frac{1}{\gamma}\frac{\lambda}{b\sigma} + \left(1-\frac{1}{\gamma}\right)\frac{\lambda(h_1+2\kappa)-\sigma}{\kappa b\sigma} + \frac{h_1+2\kappa}{b\sigma^2}(\bar{r}-r_t) \tag{2.29}$$

留意点 2. 高次の解における長期債の最適投資比率 *(2.29)* は、近視眼的需要項と保険需要項に分解され、さらに保険需要項は金利水準に独立な第 *2* 項（以下、「金利独立保険需要項」）と金利水準（厳密には、平均金利と現行金利の金利差）に依存する第 *3* 項（以下、「金利依存保険需要項」）に分解されている。近視眼的需要項と金利独立保険需要項は、近視眼的需要項における $\lambda/(b\sigma)$ と金利独立保険需要項における $\{\lambda(h_1+2\kappa)-\sigma\}/(\kappa b\sigma)$ に対しそれぞれを相対的危険許容度 $1/\gamma$ と *1* から相対的危険許容度を差し引いた値で重み付けた加重平均となっている。金利依存保険需要項は、$h_1, \kappa > 0$ より、最適投資比率が金利低下局面では短期債から長期債へ、金利上昇局面では長期債から短期債へ移行する現実の投資行動を説明しており、低次の解よりも経済学的に有意義な解であることを示唆している。

3 ナイトの不確実性下の消費と債券投資の最適化問題と一般化頑健効用

本章では、Anderson, Hansen, and Sargent (2003) が提案する頑健効用を紹介した後、同効用下における消費と投資の最適化問題に対する HJB 方程式を導出する。そして、Maenhout (2004) が提案する一般化頑健効用族と同効用下における消費と投資の最適化問題に対する HJB 方程式を示す。

3.1 環境

$(\Omega, \mathcal{F})$ 上の確率測度 P と等価な全ての確率測度の集合を $\mathbb{P}$ と表記する。このとき、任意の等価測度はギルサノフの定理により 2 乗可積分な適合的過程により表現されることが示される。すなわち、任意の等価測度 P^v は次式の

ラドン・ニコディム微分により定義される。

$$\frac{dP^v}{dP} = \Lambda^v = \exp\left(\int_0^\infty v_t dz_t - \frac{1}{2}\int_0^\infty v_t^2 dt\right) \tag{3.1}$$

ナイトの不確実性下、頑健効用を有する投資家は現実の確率測度として P を尤も有り得べき確率測度であると認識しているが、P と等価な他の確率測度である可能性を否定できない。そこで、彼は各消費計画に対し最悪の場合（確率測度）を想定して等価確率測度集合 $\mathbb{P}$ 上で期待効用関数を最小化する「最悪確率測度」を求める。この際、P を尤も有り得べき確率測度と認識している以上、P と大幅に乖離する最悪確率測度を想定することは杞憂であるから、P との乖離に損失を与える P に関する最悪確率測度の割引かれた相対エントロピーを期待効用に付加した関数を最小化対象とする。ここで、P に関する最悪確率測度の割引かれた相対エントロピーは次式で定義される。

$$\tilde{\mathcal{R}}^v = E^v\left[\rho\int_0^\infty e^{-\rho t}\log \Lambda_t^v \, dt\right]. \tag{3.2}$$

以下では、P を「参考確率測度」と呼ぶ。

投資家の効用汎関数は次式で表される頑健効用汎関数であると仮定する。

$$u(c) = \inf_{P^v\in\mathbb{P}} E^v\left[\int_0^\infty e^{-\rho t}\frac{c_t^{1-\gamma}}{1-\gamma}\,dt\right] + \frac{1}{\theta}\tilde{\mathcal{R}}^v \tag{3.3}$$

ここで、ρ、γ、θ は正の定数である。ρ は割引率、相対的危険回避度を表している。

留意点 3. $\theta = 0_+$ のとき、最悪確率測度は参考確率測度 P となる。θ が増加するにつれて、参考確率測度 P に関する最悪確率測度の割り引かれた相対エントロピーは大きくなり、従って、最悪確率測度と基準確率測度の乖離は増大する、すなわち、θ が大きくなるにつれて、投資家がより曖昧性回避的となることが示されている（*Kusuda (2006)*）。

3.2　頑健効用下の確率制御と一般化頑健効用族

Anderson, Hansen, and Sargent (2003) は、頑健効用における最悪確率測度導出が、状態変数である富過程と金利過程に下方圧力を加えるための項 $g(W_t)$ を次のように加えた後、

$$dW_t = \{(r_t + \varphi_t\lambda b\sigma)W_t - c_t - \varphi_t b\sigma W_t g(W_t, r_t)\}\,dt - \varphi_t b\sigma W_t\,dz_t\big\} \tag{3.4}$$

$$dr_t = \kappa(\bar{r} - r_t + \sigma g(W_t, r_t))\,dt + \sigma\,dz_t \tag{3.5}$$

g について次式で表される最小化を行うことと等価であることを示している。

$$\inf_g\left[\mathcal{D}^{(c,\varphi)}V + g(w,r)(-\varphi b\sigma w V_w + \sigma V_r) + \frac{1}{2\theta}g^2(w,r)\right] \tag{3.6}$$

頑健効用において曖昧性の回避度合を表す θ は一定で状態に独立である。Maenhout (2004) は曖昧性の回避度合を状態に依存出来るように θ を $\theta(W_t, r_t)$ で置き換えた一般化された頑健効用（以下、「一般化頑健効用」と呼ぶ）を提案している。以下では、一般化頑健効用を仮定する。

一般化頑健効用における HJB 方程式は次式のように表される。

$$\sup_{(c,\varphi)} \inf_{g} \left[\mathcal{D}^{(c,\varphi)} V - \rho V + \frac{c^{1-\gamma}}{1-\gamma} + g(w,r)(-\varphi b \sigma w V_w + \sigma V_r) + \frac{1}{2\theta(w,r)} g^2(w,r) \right] = 0 \tag{3.7}$$

s.t. (2.6)

先ず、最小化条件から

$$g^* = -\theta(w,r)(-\varphi b \sigma w V_w + \sigma V_r)$$

上式を HJB 方程式に代入すると、

$$\sup_{(c,\varphi)} \left[\mathcal{D}^{(c,\varphi)} V - \rho V + \frac{c^{1-\gamma}}{1-\gamma} - \frac{\theta(w,r)}{2}(-\varphi b \sigma w V_w + \sigma V_r)^2 \right] = 0 \tag{3.8}$$

s.t. (2.6)

HJB 方程式における最大化の 1 階の条件から最適消費・最適投資比率 (c^*, φ^*) は次式のように表される。

$$c^* = V_w^{-\frac{1}{\gamma}} \tag{3.9}$$

$$\varphi^* = -\frac{V_w}{w(V_{ww} - \theta(w,r)V_w^2)} \frac{\lambda}{b\sigma} + \frac{V_{wr} - \theta(w,r)V_w V_r}{w(V_{ww} - \theta(w,r)V_w^2)} \frac{1}{b} \tag{3.10}$$

留意点 4. 最適消費 *(3.10)* 式は不確実性が存在しない場合の最適消費 *(2.9)* 式と一致しており、頑健制御に影響されていないことは興味深い。一方、最適投資比率は頑健制御の影響を受けている。投資家が曖昧性中立的（$\theta(w) = 0$）な場合は不確実性が存在しない場合の最適投資比率 *(3.10)* と一致するが、投資家が曖昧性回避的な場合は近視眼的需要項と保険需要項の両分母に新たな項が付加されている。しかし、値関数の解析解が未知の現状では、これらの項の効果は不明である。

HJB 方程式に (3.10) 式と (3.10) を代入して整理すると、次の V に関する 2 階の偏微分方程式が得られる。

$$\begin{aligned} & rwV_w + \kappa(\bar{r} - r)V_r + \frac{1}{2}\sigma^2 V_{rr} - \rho V + \frac{\gamma}{1-\gamma} V_w^{-\frac{1-\gamma}{\gamma}} \\ & \quad + \frac{1}{2} b\sigma w(\lambda V_w - \sigma V_{wr} + \sigma\theta(w,r)V_w V_r)\varphi^* - \frac{\sigma^2}{2}\theta(w,r)V_r^2 = 0 \end{aligned} \tag{3.11}$$

上記偏微分方程式は一般に解析的に解けない。また、頑健効用（$\theta(w,r) = \theta$）の場合も解析的に解けない。次章では、一般化頑健効用関数が相似変換性を有するように $\theta(w,r)$ を特定化し、上記偏微分方程式の近似解析解を導出する。

4　相似変換型頑健効用下の消費と債券投資の最適化問題と近似解析解

本章では、一般化頑健効用族において「相似変換型頑健効用」（Maenhout (2004)）を仮定し、消費と債券投資の最適化問題と近似解析解を導出する。

4.1　相似変換型頑健効用下の消費と債券投資の最適化問題

投資家の効用汎関数を一般化頑健効用が相似変換性を有するように特定化された「相似変換型頑健効用（homothetic robust utility）」（Maenhout (2004)）と仮定する。

仮定 3. 投資家の効用汎関数は一般化頑健効用族において曖昧性の回避度合を表す $\theta(w,r)$ が次式で定義される相似変換型頑健効用とする。

$$\theta(w,r) = \frac{\delta}{(1-\gamma)V(w,r)} \tag{4.1}$$

ここで、δ は正の定数。

このとき、HJB 方程式における最大化の 1 階の条件から最適消費 c^* は (3.10) 式、最適投資比率 φ^* は次式のように表される。

$$\varphi^* = -\frac{V_w}{w\left(V_{ww} - \frac{\delta V_w^2}{(1-\gamma)V}\right)}\frac{\lambda}{b\sigma} + \frac{V_{wr} - \frac{\delta V_w V_r}{(1-\gamma V)}}{w\left(V_{ww} - \frac{\delta V_w^2}{(1-\gamma)V}\right)}\frac{1}{b} \tag{4.2}$$

(4.2) 式を偏微分方程式 (3.11) に代入して得られる V に関する 2 階の偏微分方程式から値関数がナイトの不確実性が存在しない場合の値関数と同一の関数形 (2.10) をとることが容易に推測される。(2.10) 式を HJB 方程式に代入して整理すると、次の常微分方程式が得られる。

$$\begin{aligned}\frac{\gamma\sigma^2}{2}\left(\frac{H''}{H}\right) - \frac{\gamma\delta\sigma^2}{2(1-\gamma)(\gamma+\delta)}\left(\frac{H'}{H}\right)^2 \\ + \left(\gamma\kappa(\bar{r}-r) + \frac{\gamma(\gamma+\delta-1)\lambda\sigma}{\gamma+\delta}\right)\left(\frac{H'}{H}\right) \\ + \left(\frac{(1-\gamma)\lambda^2}{2(\gamma+\delta)} + (1-\gamma)r - \rho\right) + \gamma\left(\frac{1}{H}\right) = 0\end{aligned} \tag{4.3}$$

投資家が曖昧性中立的（$\delta = 0$）な場合、上記常微分方程式は不確実性が存在しない場合の常微分方程式 (2.11) 式と一致することがみてとれる。

4.2　相似変換型頑健効用下の最適化問題の近似解析解

2 章と同様に、(h_0, h_1) を定義し、常微分方程式の非斉次項を $\lim_{t\to\infty} E[\log c_t - \log W_t]$ の周りで対数線形近似する。すなわち、(2.13) 式を常微分方程式 (4.3)

の最終項に代入すると、次の近似常微分方程式が得られる。

$$
\begin{aligned}
\frac{\gamma\sigma^2}{2}\left(\frac{H''}{H}\right) - \frac{\gamma\delta\sigma^2}{2(1-\gamma)(\gamma+\delta)}\left(\frac{H'}{H}\right)^2 \\
+ \left(\gamma\kappa(\bar{r}-r) + \frac{\gamma(\gamma+\delta-1)\lambda\sigma}{\gamma+\delta}\right)\left(\frac{H'}{H}\right) \\
+ \left(\frac{(1-\gamma)\lambda^2}{2(\gamma+\delta)} + (1-\gamma)r - \rho\right) + \gamma(h_0 - h_1 \log H) = 0
\end{aligned}
\tag{4.4}
$$

近似常微分方程式 (4.4) の解が (2.16) 式で表される 2 次関数の指数関数であることは容易に推測される。(2.16) 式を近似常微分方程式 (4.4) に代入すると、次式が得られる。

$$
\begin{aligned}
\frac{\gamma\sigma^2}{2}(a_2 + a_1^2 + 2a_1a_2r + a_2^2r^2) - \frac{\gamma\delta\sigma^2}{2(1-\gamma)(\gamma+\delta)}(a_1^2 + 2a_1a_2r + a_2^2r^2) \\
+ \left(\gamma\kappa(\bar{r}-r) + \frac{\gamma(\gamma+\delta-1)\lambda\sigma}{\gamma+\delta}\right)(a_1 + a_2r) \\
+ \frac{(1-\gamma)\lambda^2}{2(\gamma+\delta)} + (1-\gamma)r - \rho + \gamma h_0 - \gamma h_1\left(a_0 + a_1r + \frac{1}{2}a_2r^2\right) = 0
\end{aligned}
\tag{4.5}
$$

上式より、次の (a_0, a_1, a_2) に関する連立方程式を得る。

$$
\left(1 - \frac{\delta}{(1-\gamma)(\gamma+\delta)}\right)\sigma^2a_2^2 - (h_1 + 2\kappa)a_2 = 0 \tag{4.6}
$$

$$
\begin{aligned}
\gamma\left\{\left(1 - \frac{\delta}{(1-\gamma)(\gamma+\delta)}\right)a_2 - (h_1+\kappa)\right\}a_1 \\
+ \gamma\left(\kappa\bar{r} + \frac{(\gamma+\delta-1)\lambda\sigma}{\gamma+\delta}\right)a_2 + 1 - \gamma = 0
\end{aligned}
\tag{4.7}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\gamma}{2}\left(1 - \frac{\delta}{(1-\gamma)(\gamma+\delta)}\right)a_1^2 + \frac{\gamma\sigma^2}{2}a_2 + \left(\gamma\kappa\bar{r} - \frac{(\gamma+\delta-1)\lambda\sigma}{\gamma+\delta}\right)a_1 \\
+ \frac{(1-\gamma)\lambda^2}{2(\gamma+\delta)} - \rho\gamma h_0 - \lambda h_1 a_0 = 0
\end{aligned}
\tag{4.8}
$$

(4.6) 式より、低次の解 $a_2 = 0$、或いは、高次の解

$$
a_2 = \frac{(\gamma-1)(\gamma+\delta)}{\gamma(\gamma+\delta-1)}\frac{h_1+2\kappa}{\sigma^2} \tag{4.9}
$$

が得られる。

低次の解については、$a_2 = 0$ を (4.7) 式に代入すると、a_1 はナイトの不確実性が存在しない場合の低次の解 (2.22) 式と関数形は一致する。$a_0, (h_0, h_1)$ を同様に求めると、長期債の近似最適投資比率は次のようになる。

$$
\varphi_t^* = \frac{1}{\gamma+\delta}\frac{\lambda}{b\sigma} + \left(1 - \frac{1}{\gamma+\delta}\right)\frac{1}{h_1+\kappa} \tag{4.10}
$$

以下では、高次の解を導出する。(4.9) 式を (4.7) 式に代入すると、a_1 が次のように求まる。

$$a_1 = -\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)\frac{\lambda(h_1+2\kappa)-\sigma}{\kappa\sigma} - \frac{(\gamma-1)(\gamma+\delta)}{\gamma(\gamma+\delta-1)}\frac{h_1+2\kappa}{\sigma^2}\bar{r} \tag{4.11}$$

$a_0, (h_0, h_1)$ を同様に求めると、高次の解に対応する近似値関数、近似最適消費、長期債の近似最適投資比率が次のようになる。

$$V(W_t, r_t) = \exp\left[\gamma\left\{a_0 + a_1 r_t + \frac{(\gamma-1)(\gamma+\delta)}{2\gamma(\gamma+\delta-1)}\frac{h_1+2\kappa}{\sigma^2}r_t^2\right\}\right]\frac{W_t^{1-\gamma}}{1-\gamma} \tag{4.12}$$

$$c_t^* = \exp\Big[-a_0 - a_1 r_t - \frac{(\gamma-1)(\gamma+\delta)}{2\gamma(\gamma+\delta-1)}\frac{h_1+2\kappa}{\sigma^2}r_t^2\Big]W_t \tag{4.13}$$

$$\varphi_t^* = \frac{1}{\gamma+\delta}\,\frac{\lambda}{b\sigma} + \left(1-\frac{1}{\gamma+\delta}\right)\frac{\lambda(h_1+2\kappa)-\sigma}{\kappa b\sigma} + \frac{h_1+2\kappa}{b\sigma^2}(\bar{r}-r_t) \tag{4.14}$$

留意点 5. 最適投資比率 *(4.14)* 式をナイトの不確実性が存在しない場合の高次の解における最適投資比率 *(2.29)* 式と比較すると、両者とも、近視眼的需要項と金利独立保険需要項は、近視眼的需要項における $\lambda/(b\sigma)$ と金利独立保険需要項における $\{\lambda(h_1+2\kappa)-\sigma\}/(\kappa b\sigma)$ の加重平均となっているほか、金利依存保険需要項も見かけ上一致している。しかしながら、重み付けは、ナイトの不確実性が存在しない場合の相対的危険許容度 $1/\gamma$ と *1* から相対的危険許容度を差し引いた値ではなく、$1/(\gamma+\delta)$ と $1-1/(\gamma+\delta)$ となっている。同結果から、δ は「相対的曖昧性回避度」と呼ぶべき役割を果たしている。そこで、危険と曖昧性を総称して「不確実性」と呼ぶのであれば、差し当たり $\gamma+\delta$ は「相対的不確実性回避度」、$1/(\gamma+\delta)$ は「相対的不確実性許容度」と呼べよう。このとき、相似変換型頑健効用下の長期債最適投資比率における近視眼的需要項と金利独立保険需要項は、近視眼的需要項の $\lambda/(b\sigma)$ と金利独立保険需要項の $\{\lambda(h_1+2\kappa)-\sigma\}/(\kappa b\sigma)$ に対しそれぞれを相対的不確実性許容度と *1* から相対的不確実性許容度を差し引いた値で重み付けた加重平均となっている。従って、ナイトの不確実性が存在しない場合に比べ、長期債の投資比率自体に見かけ上大きな差異はないものの、長期債需要の内訳は、曖昧性に対する頑健制御の影響によって、近視眼的需要から金利独立保険需要へ移行している。これは、ナイトの不確実性への考慮が目先よりも遠い将来を重視させている、と自然に解釈される。また、ナイトの不確実性の存在は、これが存在しない場合に比べ、$(h_1, h_2), (a_0, a_1, a_2)$ 等の値を変化させているほか、シャープ測度 λ 等を変化させていることから、見かけ以上の大きな差異が生じている可能性も否定出来ない。

参考文献

[1] Anderson, E. W., L. P. Hansen, and T. J. Sargent (2003): “A Quartet of Semi-groups for Model Specification, Robustness, Prices of Risk, and

Model Detection," *Journal of the European Economic Association*, 1, 68-123.

[2] Campbell, J. Y. and L. M. Viceira (2001): Appendix to *Strategic Asset Allocation*, on http://kuznets.fas.harvard.edu/ campbell/papers.html.

[3] Campbell, J. Y. and L. M. Viceira (2002): *Strategic Asset Allocation*, Oxford University Press, Oxford, NY.

[4] Polyanin, A. D. and V. F. Zaitsev (1995): *Handbook of Exact Solutions for Ordinary Differential Equations*, CRC Press, Boca Raton, FL.

[5] Knight, F. H. (1921): *Rsik, Uncertainty, and Profit*, Boston: Houghton Mifflin.

[6] Kusuda, K. (2006): "A Robust Recursive Utility under Jump-Diffusion Information," Working Paper B-9, Center for Risk Research, Faculty of Economics, Shiga University.

[7] Maenhout, P. J. (2004) "Robust Portfolio Rules and Asset Pricing," *The Review of Financial Studies* 17, 4, 951-84.

[8] Vasicek, O. (1977) "An Equilibrium Characterization of the Term Structure," *Journal of Financial Economics* 5, 177-88.

[9] 楠田浩二 (2013)「消費と債券投資の多期間最適化問題における高次の近似解析解」Discussion Paper J-35、滋賀大学経済学部附属リスク研究センター