CRR DISCUSSION PAPER SERIES　J

Discussion Paper No. J-31

人口動態と財政政策の維持可能性

近藤豊将

2012 年 10 月

Center for Risk Research
Faculty of Economics
SHIGA UNIVERSITY

1-1-1 BANBA, HIKONE,
SHIGA 522-8522, JAPAN

滋賀大学経済学部附属リスク研究センター
〒522-8522 滋賀県彦根市馬場 1-1-1

人口動態と財政政策の維持可能性

近藤 豊将[1]
滋賀大学経済学部[2]

平成24年10月15日

[1]e-メール：a-kondo@biwako.shiga-u.ac.jp
[2]〒522-8522 滋賀県彦根市馬場1丁目1-1

概 要

本稿では，人口変動を含むシンプルな動学的一般均衡モデルを用いて，人口動態と財政政策の維持可能性の関係を調べる．財政政策の長期的維持可能性を定義するとともに，政府債務の時間経路や財政政策が維持可能となる政府の初期負債の上限を導出する．そして，人口成長率や人口規模が変化したとき，それらがどのような影響を受けるかを理論的に分析している．また，数値例を用いて政府債務経路のグラフを描出し，人口動態の変化のそれへの影響を視覚的に追跡している．

Key Words: 財政政策の維持可能性，政府債務動学，人口動態，動学的一般均衡

1　序

財政赤字の累積額は，ますます膨張している．我が国の（グロスの）政府債務残高は，国内総生産（GDP）の 2 倍を超える．(ただし，中央政府，地方政府，社会保障基金を合わせたもの．詳しくは，財務省のホームページを見よ.）これは，経済協力開発機構（OECD）諸国の中でも，群を抜いて高い水準である．しかも，刻一刻と増加中だ．このままでは，かなりの高確率で，早晩財政は破綻するという深刻な試算結果も存在する．(Sakuragawa and Hosono (2010) を見よ.）

財政赤字累積問題は，近年の世界的不況や少子高齢化などとともに，国民の未来にとって大きな不安材料と言われている．それら不安要因は，相互に連動しているように見えるし，互いに増幅し合っている観さえある．しかし，それらの複雑な因果関係の全貌を，素朴な直観だけで把握しきるのは困難であろう．問題の重要性に鑑み，集中的な研究の蓄積が急務である．

本稿では，シンプルな動学的一般均衡モデルを用いて，人口動態が財政政策の長期的維持可能性に及ぼす影響を理論的に分析する．少なからぬ先進諸国は少子化に悩んでいる．(主要国では，ドイツ，ロシア連邦，ブルガリア，ルーマニア，ハンガリーなどが深刻である.）だが，少子化の害悪については，経済学者の間でも意外なほど共有理解が少ない．少子化が進んでも，一人あたりの生産性さえ堅持できれば，生活水準を守るために大したデメリットはないのではないかというのである．経済学者の間でこの疑念が根付いている理由の一つに，ソローモデルの影響があるのではないだろうか．そこでは，人口成長率の減少は，むしろ，一人あたり資本の蓄積を促進し生活水準の改善につながる効果を持つ．(Solow の原論文 (1956) や中級マクロ経済学の教科書を見よ.）だが，ソローモデルを離れ現実の経済に目をやると，少子化を楽観視できない理由はいくつもある．

政府債務の累積した現代の少なからぬ先進諸国にとっては，納税者数の減少とそれに伴う経済の絶対規模の縮小は死活問題である．財政政策の長期的維持可能性と人口成長率や人口規模との関係について研究を蓄積することの意義は，非常に大きいと思われる．

本稿では，特に政府債務の時間経路と返済可能な政府債務の上限に対する，人口成長率と人口の絶対規模の影響に焦点を置く．結論から言うと，人口成長率が回復した場合，または，人口規模が増大した場合，政府の財政事情にはプラスの効果が得られる．均衡経路上の政府債務は減

少し，返済可能な政府債務の上限は上昇するのだ．納税者の数が増えるわけだから，これは驚くべき結論ではない．だが，その作用の仕方には顕著な違いも生じうる．本稿では，シンプルな動学的一般均衡モデルを用いて，その点も厳密に検討する．なお本稿でいう「人口動態」は，人口成長率と人口規模の 2 種類の変数の事である．

シンプルながら数理的な動学的一般均衡モデルを用いることには，いくつか利点がある．第 1 に，直観だけでは充分に追跡できないような分析も，論理操作により実行することができる点である．結果，多くの方にとって必ずしも直観と合致しない，だが示唆に富んだ結論が導かれることもある．本稿の中にも，そのような結論も含まれていると期待したい．

第 2 に，経済主体のインセンティブや市場の機能を，余すところなく考慮できる点である．政策担当者が陥りがちな誤りの一つに，これらに対する認識が不十分な点があるかもしれない．社会が抱える問題に対して官僚的発想で対処しようとしてもうまくいかないことが多いのは，人間やその行動の変化に対する洞察を欠いていることが一因である．逆に言えば，“敵を知り己を知れば，百戦危うからず”の言葉通り，政策担当者は，経済主体のインセンティブやマーケットの機微を熟知したうえで政策を考えるべきである．この点からも，動学的一般均衡モデル用いた分析成果を社会的に蓄積することには，大きな意義がある．

第 3 に，概念を明確に定義できる点である．累積した政府債務が問題視されているが，政府は有限期間内になくなるわけではないので，いつまでにその負債を完済しなければならないというわけではない．一定水準の負債を永遠に抱え続けることもできる．したがって，財政政策の長期的維持可能性というときの“長期”は，特に 10 年後を指すわけでもなければ，100 年後を指すわけでもない．では，それは何を意味するのか．それ自体，明確に定義する必要がある．本稿の第 4 節では，財政政策の長期的維持可能性が根拠とともに数学的に定義されるが，それが可能になるのも数理モデルを用いていることの大きな利点である．

本稿では，理論分析のみならず，数値例を与えて政府債務の時間経路を描いている．人口成長率や人口規模が変化し，財政政策が維持可能な状態から維持不可能な状態に変化するとき，政府債務経路がどのように変化するかを調べた．また，財政政策が維持可能であるにもかかわらず，政府債務（インフレ調整された実質値；ただし対 GDP 比ではない）が時間とともに無限大に発散する経路も，実際に描出している．百聞は一見にしかず．この試みは，我々の理解の助けとなるはずである．

先行研究

本稿で扱う問題の社会的な重要性については，改めて強調するまでもないだろう．当然，関連する研究は，実証研究を中心にすでに多数ある．これらは，およそ3種類の方法に基づいている．Hamilton and Flavin (1986) を代表とする政府によるポンジー・スキーム禁止条件をチェックする方法，Trehan and Walsh (1988, 1991) による単位根・共和分分析を用いる方法，Bohn (1998) による増大する政府債務に対する政府の適応（修正）行動を確認する方法の3種類である．現実の危機的財政状況を反映してか，特に日本やヨーロッパで研究が盛んだ．Fukuda and Teruyama (1994)，Ihori, Doi and Kondo (2001)，Broda and Weinstein (2005) は日本，Greiner, Koeller and Semmler (2007)，Fincke and Greiner (2012) はヨーロッパ諸国に関する実証研究である．実証研究については，加藤（2010）などに丁寧なサーベイがあるので，ここでは繰り返さない．

本稿と最も密接にかかわる理論研究は，やはり筆者自身による一連の研究である．Kondo (2007) および Kondo and Kitaura (2009) は，貨幣を含む二国モデルを扱った Neumeyer and Yano (1995) を，閉鎖モデルに単純化し，インフレーションやデフレーションが財政政策の維持可能性に及ぼす影響を分析している．Kondo and Kitaura (2012) は，Neumeyer と Yano による二国モデルを用い，自国政府の財政政策の維持可能な上限を導出している．さらに，他国の金融政策が自国の財政事情（財政政策の維持可能な上限）に影響を与えること，そしてそのチャネルを通じてインフレやデフレが国境を越えて伝染する可能性があることを報告している．Kondo (2012a) は，本稿と同じモデルを用いて，人口成長率が微小量減少したとき，政府債務を維持可能に保つためには一人あたりの税収や人口規模がどれだけ変化する必要があるか，という問題に一つの解答を与えている．Kondo (2012b) は，生産性上昇率の改善が，政府債務の動学経路に与える影響を分析している．そこでは，政府債務とプライマリーバランス（基礎的財政収支）の比率次第では，短期と長期とで相反する効果が現れることなどが報告されている．

Greiner と Semmler は，その2000年の論文で，パブリック・ファイナンスの黄金律 (Golden Rule of Public Finance；GRPF) の効果について理論的に研究している．GRPF とは，政府が資金調達のために国債を発行するのは生産的な公共投資に用いる場合に限ると，使途に制限を設ける政策レジームである．これは財政運営に一種の規律をもたらすことになる．

英国などで実際に採用されていることもあり，その意義について，ヨーロッパを中心に研究がすすんでいる．Ghosh and Mourmouras (2004) は，Greiner and Semmler (2000) タイプのモデルを用いて GRPF の厚生分析を行っている．Groneck (2010) は，効用を高めるタイプの公共投資を明示的に導入することで彼らの研究を拡張している．

本稿では，人口成長率を外生変数として扱う．これは単純化のための有用な仮定ではあるが，子供の数を家計による最適選択の結果決まる内生変数として説明する研究も多数ある．そのような内生的出生率に関する諸研究は，Becker and Barro (1988) と Barro and Becker (1989) を以て嚆矢とする．Benhabib and Nishimura (1989) は，Barro-Becker タイプのモデルで周期解（すなわち，人口の規則的な変動）が発生するための条件を見出している．

本稿は以下のように構成される．第 2 節では，本稿での議論の基礎となるモデルを提示する．第 3 節では，均衡経路を導出する．特に，政府債務の動学（時間）経路が，本稿の目的にとって重要である．また，それに対する人口動態の影響も調べる．第 4 節では，財政政策の維持可能性について定義し，そうなるために政府の初期債務が満たすべき条件を導出する．初期債務の上限に対する種々の変数の影響は，本稿のハイライトである．第 5 節では，数値例を用いて，政府債務の動学経路のグラフを描く．与件（特に人口成長率や人口規模）が変化したときの経路の変化を視覚的に追跡する試みである．最後に第 6 節では，簡単に本稿の分析をまとめ今後の研究を展望する．

2　モデル

本節では，本稿での分析の基礎となるモデルを提示する．多くの同質的な家計と政府からなる離散時間動学モデルを考える．時点 $t-1$ と時点 t の間を第 t 期と呼ぶ．現在時点は $t=0$ で，第 1 期が始まるところである．第 t 期の人口は N_t とする．家計と政府は，毎期毎期，消費財と国債を取引する．消費財は 1 種類のみである．

政府は，国債を消費財単位で測って B_t^g だけ発行する．国債は，家計に保有される．政府は，国債を保有している家計に対して，第 t 期から第 $t+1$ 期にかけて実質利子率 $1+r_t$ を支払う（これも消費財単位で測られている）．家計は，第 t 期に消費財 1 単位を消費することをあきらめそ

の代わりに国債を保有することで，第 t + 1 期に消費財 $1 + r_t$ 単位を受け取ることができるのである．この意味で，**実質利子率$1 + \mathrm{r}_t$ は，第 t 期の消費財と第 t + 1 期の消費財の交換比率である**．換言すれば，**実質利子率$1 + \mathrm{r}_t$ は，第 t 期における財 1 単位の第 t +1 期の財で測った価格**と解釈できる．

2.1　家計の意思決定

代表的個人は第 t 期に $1 + n$ 人の兄弟姉妹を持つことになる．彼（女）らの子供の数も $1+n$ 人である．このとき，人口成長率は $1+n = N_{t+1}/N_t$（$t = 1, 2, \cdots$）となる．代表的個人は第 t 期の期首（時点 $t-1$）に消費財単位で測って $b_{t-1}/(1+n)$ だけの国債を遺産として親から受け取り，その期の期末には b_t を子供達への遺産として譲り渡す．それが，$1+n$ 人の子供達に分割されるわけである．各家計は，第 t 期に y_t だけの消費財を生産し，c_t だけを消費し，τ_t だけを政府に一括税として支払う．この税も消費財単位で測られている．以上より，第 t 期の家計の予算制約式は，

$$b_t \leq y_t - \tau_t - c_t + (1 + r_{t-1})\frac{b_{t-1}}{1+n}, \quad \text{for any } t = 1, 2, \cdots \tag{1}$$

となる．ここで,「for any $t = 1, 2, \cdots$」と書いているのは,「左の式は，任意の自然数 $t = 1, 2, \cdots$ について満たされる」という意味である．

第 t 期に生きる代表的個人が効用を得るのは，自分の消費 $c_t\,(>0)$ と子供達が得る効用からである．消費とそこから得る効用の関係は対数関数で表されるとする．ただし，子供達の総効用は β の比率で割り引かれる．この β は，割引因子と呼ばれる．その範囲について，次の仮定を置く．

仮定１： $0 < \beta < 1/(1+n)$.

以上から，第 t 期の代表的家計の効用 U_t は，

$$U_t = \log c_t + \beta \cdot (1+n)\, U_{t+1}$$

となる．この式は，任意の自然数 $t = 1, 2, \cdots$ について満たされる．ここで，U_{t+1} は，子供の一人（第 t +1 期の代表的家計）が得る効用である．注意すべきなのは，第 t +1 期の代表的家計の効用 U_{t+1} は，第 t +2 期の代表的家計が得る効用 U_{t+2} に依存している点である．その点に注意する

と，U_t を

$$\begin{aligned} U_t &= \log c_t + \beta\,(1+n)\,[\log c_{t+1} + \beta\,(1+n)\,U_{t+2}] \\ &= \log c_t + \beta\,(1+n)\log c_{t+1} + [\beta\,(1+n)]^2\,U_{t+2} \end{aligned}$$

と書き換えることができる．さらに，第 t +2 期の代表的家計の効用 U_{t+2} は，第 t +3 期の代表的家計の効用 U_{t+3} に依存する．その構造は，ずっと続くこととなる．結局，第 t 期の代表的家計の効用は，

$$\begin{aligned} U_t &= \log c_t + \beta\,(1+n)\log c_{t+1} \\ &\quad + [\beta\,(1+n)]^2 \log c_{t+2} + [\beta\,(1+n)]^3 \log c_{t+3} + \cdots \\ &= \sum_{s=1}^{\infty} [\beta\,(1+n)]^{s-1} \log c_{t+s-1} \end{aligned}$$

となる[1]．

結局，第 1 期の代表的家計の行動は，以下の最適化問題としてまとめることができる．

$$\begin{aligned} &\max_{\{c_t,b_t\}_{t=1}^{\infty}} \sum_{t=1}^{\infty} [\beta\,(1+n)]^{t-1} \log c_t \qquad (2) \\ &\text{s.t. 予算制約式（1）} \\ &\text{given } \{1+r_t\}_{t=0}^{\infty},\ b_0 \end{aligned}$$

これは，消費と国債保有の経路 $\{c_t, b_t\}_{t=1}^{\infty}$ を操作することで，効用の割引総和を最大化（max）せよという意味である．ただし，実質利子率の経路と初期時点における国債保有は所与であり，毎期毎期の予算制約式（1）を制約条件としなければならない．記号 s.t. は，subject to の略号で「〜の制約の下で」という意味である．

第 1 期の代表的家計の最適化問題（2）の結果，消費と国債保有の経路

$$\{(c_1, b_1),\ (c_2, b_2),\ (c_3, b_3),\cdots,\ (c_t, b_t),\ (c_{t+1}, b_{t+1}),\cdots\} \qquad (3)$$

が決まる．同様に，第 t 期の代表的家計は，

$$\{(c_t, b_t),\ (c_{t+1}, b_{t+1}),\ (c_{t+2}, b_{t+2}),\cdots\} \qquad (4)$$

[1]厳密には，

$$\lim_{T\to\infty} [\beta\,(1+n)]^T\,U_{t+T} = 0$$

を仮定している．

を決定する．ここで,（3）における消費，国債保有を表すベクトルの時間流列の第 t 期以降の部分は,（4）の経路一致するはずだ．なので，家計部門による意思決定は，一つの最適化問題（2）にまとめることができているのである．

2.2 政府の意思決定と財政政策

政府は政策変数の経路 $\{B_t^g, \tau_t, g_t\}$ を決定する．ここで，τ_t は代表的家計に課される一括税，g_t は国民一人あたりの（代表的家計に対する）財政支出である（これも消費財単位で測られているとする）．第 t 期におけるトータルの税収は $T_t = N_t \tau_t$，トータルの財政支出は $G_t = N_t g_t$ となる．

第 t 期における政府の予算制約式は,

$$(1 + r_{t-1})\, B_{t-1}^g + G_t \leq T_t + B_t^g \tag{5}$$

となる．この式は，任意の自然数 $t = 1, 2, \cdots$ について満たされる必要がある．各項はいずれも消費財単位で測られていることに，再度，読者の注意を喚起しておこう．右辺と左辺は，それぞれ第 t 期における収入と支出である．政府の予算制約式（5）は，ここでは不等号で提示しているが，実際には等号で満足されるものとして扱う．また，初期時点での実質債務 B_0^g と実質利子率 $1 + r_0$ は，政府にとって所与である．

初期時点での実質利付き債務 $(1 + r_0)\, B_0^g$ と各期の人口規模 N_t を所与である．ゆえに，国民一人あたりの実質課税額と実質支出の経路 $\{\tau_t, g_t\}$ が政府の決定すべき変数であり，その決定が“財政政策”である．それらが決まれが，人口規模 N_t は所与なので，実質課税総額と実質総支出の経路 $\{T_t, G_t\}$ が決まる．すると，政府債務の時間経路 $\{B_t^g\}_{t=1}^{\infty}$ は,（5）より確定する．

2.3 市場均衡条件

市場均衡条件は，任意の自然数 $t = 1, 2, \cdots$ について,

$$Y_t = C_t + G_t, \quad B_t^g = B_t \tag{6}$$

が成り立つことである．ここで，$Y_t = N_t y_t$，$B_t = N_t b_t$ である．第 1 式は消費財について，第 2 式は国債についての需給均衡条件（右辺が需要，左辺が供給）である．価格と配分の時間経路は，家計の主体均衡条件（2），政府の予算制約式（5）と市場均衡条件（6）を満足するように決まる．

3　均衡経路と人口動態の政府債務経路への影響

本節では，均衡における価格と配分の経路を明示的に導出し，政府債務経路に対する人口動態の影響を分析する．均衡経路に沿っての政府債務の動きには，後の節でも議論の焦点が置かれるが，本節での結果はその基礎となる．

3.1　均衡経路の導出

最初に，最適化問題（2）の一階の条件として，均衡経路上では，任意の自然数 $t = 1, 2, \cdots$ について

$$\frac{c_{t+1}}{c_t} = \beta\,(1 + r_t) \tag{7}$$

が成り立つことを確認しておこう．予算制約式（1）を c_t と c_{t+1} について解き目的関数に代入すると，

$$\begin{aligned} U_1 = \cdots &+ [\beta\,(1+n)]^{t-1} \log \left[y_t - \tau_t + (1 + r_{t-1}) \frac{b_{t-1}}{1+n} - b_t \right] \\ &+ [\beta\,(1+n)]^{t} \log \left[y_{t+1} - \tau_{t+1} + (1 + r_t) \frac{b_t}{1+n} - b_{t+1} \right] + \cdots \end{aligned}$$

を得る．U_1 を b_t で偏微分して 0 とおくと,（7）が得られる．　□

均衡経路を解くために，以下の仮定を置く．

仮定 2： $y_{t+1}/y_t = g_{t+1}/g_t = \tau_{t+1}/\tau_t = 1 + \theta$ for any $t = 1, 2, \cdots$.

仮定 3： $0 \leq g_1 < \tau_1 < y_1$, $B^g_0 > 0$.

本稿の主眼は，人口動態と財政政策の維持可能性の関係を理論的に分析することである．ゆえに，モデルの他の側面は極力シンプルに保つ．仮定 2 は，家計の生産性上昇率，家計一戸あたりの財政支出の伸び率，課税額の伸び率は，すべて同じ率とする仮定である．

このとき，

$$\frac{Y_t}{Y_{t-1}} = \frac{N_t y_t}{N_{t-1} y_{t-1}} = (1+n)\,(1+\theta)$$

なので，第 t 期におけるこの経済の GDP は，

$$Y_t = (1+n)^{t-1}\,(1+\theta)^{t-1}\,N_1 y_1 \tag{8}$$

と表される．この式によると，**GDP の成長率は，人口成長率$\mathbf{1+n}$と（一人あたりの）生産性上昇率$\mathbf{1+\theta}$によって決まる**ことがわかる．逆に本稿の分析では，GDP の成長要因をその 2 つに限定しているともいえる．例えば，一般に，資本蓄積は経済成長の重要な要因であるが，ここでは捨象している（または，生産性上昇率に包摂している）．**人口成長率$\mathbf{1+n}$と生産性上昇率$\mathbf{1+\theta}$は，GDP の成長率に対して，全く同じように作用している**ことも, (8) から見てとれる．

同様に，毎期毎期の基礎的財政収支 $T_t - G_t$ についても，

$$T_t - G_t = (1+n)^{t-1}(1+\theta)^{t-1} N_1 (\tau_1 - g_1) \tag{9}$$

という関係がある．仮定 2 の下では，基礎的財政収支 $T_t - G_t$ も, (外生変数である）人口成長率と生産性上昇率によって決まるのである．その結果，本稿でいう財政政策は，一人あたりの実質課税額と財政支出の初期値 (τ_1, g_1) の決定ということになる．前節の政府の行動と財政政策の箇所では，$\{\tau_t, g_t\}$ の決定が財政政策であると述べたが，仮定 2 の下では，結局その決定もそれらの初期値 (τ_1, g_1) の決定に帰着するのである．また，この仮定の下では，プライマリーバランスの対 GDP 比率が時間を通じて一定になることにも注意されたい．この点は, (8) と (9) により

$$\frac{T_t - G_t}{Y_t} = \frac{(1+n)^{t-1}(1+\theta)^{t-1} N_1 (\tau_1 - g_1)}{(1+n)^{t-1}(1+\theta)^{t-1} N_1 y_1} = \frac{\tau_1 - g_1}{y_1}$$

と容易に確認できる．

仮定 3 は，本稿では，初期時点において政府は負債を抱えており（$B_0^g > 0$），それを毎期毎期の財政黒字（$\tau_t - g_t > 0$）で返済していく状況を考えるということを表している．初期時点で負債を抱えているにもかかわらず，恒久的に財政赤字を続けるという財政政策は“維持不可能”である．(維持可能性については，次節で厳密に定義する.)

以上の仮定の下，政策パラメーター (τ_1, g_1) と初期条件 (r_0, b_0, N_1, y_1) を所与として，すべての内生変数が決まる．

補題 1 均衡経路上で，内生変数は次のように決まる：

$$(A)\ c_t = (1+\theta)^{t-1}(y_1 - g_1); \qquad (B)\ 1 + r_t = \frac{1+\theta}{\beta};$$

$$\begin{aligned}(C)\ B_t^g = {} & \left(\frac{1+\theta}{\beta}\right)^{t-1}(1+r_0)\,B_0^g \\ & - \left[\sum_{j=0}^{t-1}\left(\frac{1+\theta}{\beta}\right)^{j}\left[(1+n)(1+\theta)\right]^{t-j-1}\right]N_1(\tau_1 - g_1)\end{aligned}$$

これらの関係は，任意の自然数 $t = 1, 2, \cdots$ について満たされる．

証明. （A）市場均衡条件と仮定 2 より，

$$c_t = y_t - g_t = (1+\theta)(y_{t-1} - g_{t-1}) = (1+\theta)^{t-1}(y_1 - g_1)$$

となる．

（B）一方で, (7) を用いると,

$$\frac{C_{t+1}}{C_t} = \frac{N_{t+1}c_{t+1}}{N_t c_t} = (1+n)\frac{c_{t+1}}{c_t} = (1+n)\,\beta\,(1+r_t)$$

が成り立つ．他方で，市場均衡条件と仮定 2 より，

$$\begin{aligned}\frac{C_{t+1}}{C_t} = \frac{Y_{t+1} - G_{t+1}}{Y_t - G_t} &= \frac{(1+n)(1+\theta)Y_t - (1+n)(1+\theta)G_t}{Y_t - G_t} \\ &= (1+n)(1+\theta)\end{aligned}$$

が成り立つ．両式をあわせると, (B) が導かれる．

（C）政府の予算制約式（5）より，

$$B_t^g = \frac{1+\theta}{\beta}B_{t-1}^g - \left[(1+n)(1+\theta)\right]^{t-1}N_1(\tau_1 - g_1) \tag{10}$$

が任意の自然数 t について成り立つ. (均衡経路上を考えているので (B) が成り立っている.) 初期条件は

$$B_1^g = (1+r_0)\,B_0^g - N_1(\tau_1 - g_1) \tag{11}$$

である[2]．これより, (C) が成り立つことがわかる． □

[2]第 0 期から第 1 期にかけての実質利子率 $1 + r_0$ は，ここでの分析にとり外生的に与えられているので，$(1+\theta)/\beta$ に等しいと証明することはできない．

（A）からすぐにわかることであるが，第 t 期の総消費 C_t は，仮定 2 より

$$C_t = (1+n)^{t-1} (1+\theta)^{t-1} N_1(y_1 - g_1)$$

となる．仮定 2 の下では，多くの変数が時間を通じて同じ比率で比例的に変化していくのである．経済が，斉一成長経路上にあると言い換えることもできる．本論文では政府債務の動学経路に注目するので，単純化のための仮定として仮定 2 は有用である．

（B）によると，均衡実質利子率は時間にかかわらず常に一定となるので，時間を表現する添え字を外してそれを $1+r$ $(= (1+\theta)/\beta)$ と書くこともある．ここで注意しておきたいのは，**家計の生産性上昇率 $1+\theta$ は実質利子率にプラスの影響を与える**一方，**人口成長率 $1+n$ は実質利子率に影響しない**という点である．この両者が，GDP の成長に対しては，全く同じように寄与していたことと対照的である．その理由は，直感的に以下のように説明できる．実質利子率 $1+r$ は，現在財を人に 1 単位レンタルしたとき，将来において返済される財の量を表している．この意味で，現在財の（将来財で測った）単価である.（この点は，前節で説明済みである.）生産性が上昇すると，将来財の一人あたりの供給量が現在財に比して豊富になるので，現在財の相対的な希少性が高まり，その単価である実質利子率 $1+r$ は上昇するのである．それに対して，人口成長率 $1+n$ の上昇は，将来財の供給量の増加を意味するが，需要する人も同率で増加するため，将来財の一人あたりの供給量には影響しない．したがって，異時点間の財の間の相対価格に相当する実質利子率も影響を受けないのである．実質利子率は，本稿の眼目である政府債務の動学経路と財政政策の維持可能性にとって非常に重要であるので（(C）および次節を見よ），それに対する様々な要因の影響の仕方に注目しておいてもらいたい.

仮定 1 より，本稿の設定の下では，**実質利子率は GDP の成長率よりも高くなる**点にも注意されたい．すなわち，

$$(1+n)(1+\theta) < 1+r \tag{12}$$

となる．つまり，ドーマー条件（Domar condition）は成り立たない状況である（Domar (1944) を見よ）．ドーマー条件が満たされれば（(12）の不等号が逆なら）財政政策は維持可能であることが知られている．だが，それが満たされなくても財政政策は維持可能になりうる．本稿の分析は，ドーマー条件が満たされない場合に対応している．

（C）について，試みに B_2^g を導出してみよう.（10）より

$$B_2^g = \frac{1+\theta}{\beta} B_1^g - (1+n)(1+\theta) N_1(\tau_1 - g_1)$$

なので初期条件（11）を代入すると

$$\begin{aligned} B_2^g &= \frac{1+\theta}{\beta}\left[(1+r_0) B_0^g - N_1(\tau_1 - g_1)\right] - (1+n)(1+\theta) N_1(\tau_1 - g_1) \\ &= \frac{1+\theta}{\beta}(1+r_0) B_0^g - \left[\frac{1+\theta}{\beta} + (1+n)(1+\theta)\right] N_1(\tau_1 - g_1) \qquad (13) \end{aligned}$$

となり,（C）で $t=2$ としたケースに相当することがわかる.

以下では，均衡におけるネットの実質利子率 r をプラスに保つため，次の仮定を置くことにする.

仮定 4： $\beta < 1+\theta.$

この仮定の下では，ネットの生産性上昇率 θ はマイナスでも構わないが，グロスのそれ $1+\theta$ は割引因子 β よりは大きい範囲でなければならない.

3.2　人口動態の政府債務経路への影響

ここでは，人口成長率 $1+n$ や初期における人口規模 N_1 が変化したとき，政府債務の動学経路 $\{B_t^g\}$ がどのような影響を受けるかを調べてみよう．試みに B_2^g への影響をみてみる．時点 2 における政府債務残高 B_2^g を偏微分すると,（13）により,

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_2^g}{\partial (1+n)} &= -(1+\theta) N_1(\tau_1 - g_1) < 0 \\ \frac{\partial B_2^g}{\partial N_1} &= -\left[\frac{1}{\beta} + (1+n)\right](1+\theta)(\tau_1 - g_1) < 0 \end{aligned}$$

となる．これらの符号はマイナスである．この符号に関しては，どの時点の政府債務残高についても，同様にマイナスとなることを確認できる．人口成長率や人口規模が微小量だけ回復（上昇）したとき，どの時点の政府債務も減少するのである．換言すれば，人口成長率や人口規模が微

小量だけ上昇したとき，政府債務の動学経路は，全体として下方シフトする.（視覚的にも，第5節の図2と4により確認できる.）

この結果を定理としてまとめておこう[3].

定理 1 （人口動態の政府債務動学への影響）

人口成長率や人口規模が微小量だけ回復（上昇）したとき，どの時点の政府債務も減少する．厳密には,

$$\frac{\partial B_t^g}{\partial(1+n)} < 0, \qquad \frac{\partial B_t^g}{\partial N_1} < 0$$

が，任意の自然数 $t = 1, 2, \cdots$ について成り立つ.

4 財政政策の維持可能性

個人の場合,（特に子供がいない場合）借金を抱え資産を持たないまま生涯を終えるのは社会的に都合が悪い，ということはすぐわかる．貸した方が不当に損をするからだ．そのような人ばかりでは，資金を貸してくれる人はいなくなるだろう．そうなっては，返済可能な範囲でローンを組み，生涯収入に相応しい異時点間の予算配分を実現しようとする多くの人々にとっては損害である.（少なくとも子供に迷惑をかけたくなければ）生涯を終えるまでのある期間内に，借金を完済しなければならない.

ところが政府の場合，有限期間内に生涯を終えるわけではない．**政府は**,（比喩的に言えば）無限期間にわたって存続し続けるので，**必ずしも有限期間内に借金を完済しなければならないわけではない**．したがって,何を以て政府の財政政策が“長期的に維持可能”と呼ぶかは，自明な問題ではない．ここでいう“長期”は，特に10年後のことでもなければ100年後のことでもないのである.

本節では，財政政策が長期的に維持可能であるということを根拠（補題2）を示したうえで定義し，そのために初期の政府債務残高 B_0^g が満たすべき条件を導出する.

---

[3]生産性上昇率 $1+\theta$ の政府債務動学への影響については，ここでは省略する．興味のある方は，Kondo (2012b) を参照されたい.

4.1　政府の長期的予算制約

政府の活動について，収入サイドと支出サイドをそれぞれ考えてみよう．まずは，収入サイドから考察する．第 1 期における収入は，T_1 である．これは第 1 期における（消費財の）価値で測られている．第 2 期における収入は，T_2 であるが，これは第 2 期における（消費財の）価値で測られている．これを第 1 期における価値（現在価値）に直さなければ，T_1 と直接比較したり加えたりすることはできない.（1 メートルと 1 リットルを，互いに加えることはできないのと同じである.）現在価値に直すためには，$1/\left(1+r_1\right)$ をかければよい．$T_2/\left(1+r_1\right)$ が，第 2 期の収入 T_2 の割引第 1 期（現在）価値である．同様に，第 3 期の収入の割引現在価値は,

$$\left(\frac{1}{1+r_1}\frac{1}{1+r_2}\right)T_3,$$

第 t 期における収入 T_t の割引現在価値は,

$$\left(\frac{1}{1+r_1}\frac{1}{1+r_2}\cdots\frac{1}{1+r_{t-1}}\right)T_t$$

である．以上より，政府の実質収入の流列 $\{T_1, T_2, \cdots\}$ の割引現在価値の総和は,

$$T_1+\frac{1}{1+r_1}T_2+\left(\frac{1}{1+r_1}\frac{1}{1+r_2}\right)T_3+\cdots+\left(\frac{1}{1+r_1}\cdots\frac{1}{1+r_{t-1}}\right)T_t+\cdots$$

となる.

支出サイドについても同様に考える．政府の実質支出の流列 $\{G_1, G_2, \cdots\}$ の割引現在価値の総和は,

$$G_1+\frac{1}{1+r_1}G_2+\left(\frac{1}{1+r_1}\frac{1}{1+r_2}\right)G_3+\cdots+\left(\frac{1}{1+r_1}\cdots\frac{1}{1+r_{t-1}}\right)G_t+\cdots$$

である．これに，時点 0 における政府債務の利子つき残高 $\left(1+r_0\right)B_0^g$ を加える必要がある.

以上より，長期的な視野で見たときの政府の予算制約式は,

$$\begin{aligned}&\left(1+r_0\right)B_0^g+G_1+\frac{1}{1+r_1}G_2+\cdots+\left(\frac{1}{1+r_1}\cdots\frac{1}{1+r_{t-1}}\right)G_t+\cdots \\ &\le T_1+\frac{1}{1+r_1}T_2+\cdots+\left(\frac{1}{1+r_1}\cdots\frac{1}{1+r_{t-1}}\right)T_t+\cdots\end{aligned} \tag{14}$$

となる．この関係を満足する財政政策ならば“長期的に維持可能である”と呼んでも差し支えないであろう．

ところが,（14）は，条件

$$\limsup_{t\to\infty}\left(\frac{1}{1+r_1}\cdots\frac{1}{1+r_{t-1}}\right)B_t^g \leq 0 \tag{15}$$

と同値であることが知られている．ここで，記号 $\limsup$ は，数列の上極限を表す．この概念に不慣れな方は，極限 $\lim$ と同じだと思ってもかまわない[4].

補題 2 政府の長期的予算制約式（14）と政府債務の割引現在価値に関する条件（15）は互いに同値である.

証明のスケッチ[5]**.**

ここでは,（15）を認めると（14）が導出されることを説明する.（ただし，最後の部分で，極限 $\lim$ と上極限 $\limsup$ の違いをほとんど無視して扱っている.）本補題の証明を完成させるためには，逆に（14）から（15）を導き出す必要があるが，やや技術的になるので省略する.

政府の第 1 期の予算制約式は,（5）より,

$$(1+r_0)\,B_0^g + G_1 \leq T_1 + B_1^g \tag{16}$$

である．第 2 期のそれは,

$$(1+r_1)\,B_1^g + G_2 \leq T_2 + B_2^g \tag{17}$$

である．これを（16）と加えるために,（17）の両辺に $1/\,(1+r_1)$ をかけ第 1 期の価値に割り戻すと

$$B_1^g + \frac{1}{1+r_1}G_2 \leq \frac{1}{1+r_1}T_2 + \frac{1}{1+r_1}B_2^g \tag{18}$$

となる．同様に，政府の第 3 期の予算制約式は,

$$(1+r_2)\,B_2^g + G_3 \leq T_3 + B_3^g \tag{19}$$

[4]上極限 $\limsup$ は，極限 $\lim$ を一般化したものである．例えば，数列 $\{0,1,2,0,1,2,\cdots\}$ には極限は存在しないが，2 に対して呼び名が欲しい．このようなときに，この数列の上極限は，2 としてうまく定義される．ちなみに，0 は下極限 $\liminf$ と呼ばれる．極限が存在する場合，上極限と下極限は，ともに極限と一致する.

[5]本稿では深入りしないが，さらに,「政府債務の対 GDP 比率 B_t/Y_t が時間を通じて上に有界」という条件も同値であることが知られている.

であり，それを割引現在（第１期）価値に直した式は，

$$\frac{1}{1+r_1}B_2^g+\left(\frac{1}{1+r_1}\frac{1}{1+r_2}\right)G_3 \leq \left(\frac{1}{1+r_1}\frac{1}{1+r_2}\right)T_3+\left(\frac{1}{1+r_1}\frac{1}{1+r_2}\right)B_3^g \tag{20}$$

である.（16）（18）（20）を足し上げ，第１期から第３期までの統合された予算制約式を導出すると

$$\begin{aligned}&(1+r_0)\,B_0^g+G_1+\frac{1}{1+r_1}G_2+\left(\frac{1}{1+r_1}\frac{1}{1+r_2}\right)G_3\\&\leq T_1+\frac{1}{1+r_1}T_2+\left(\frac{1}{1+r_1}\frac{1}{1+r_2}\right)T_3+\left(\frac{1}{1+r_1}\frac{1}{1+r_2}\right)B_3^g\end{aligned}$$

となる．B_1^g と $B_2^g/\left(1+r_1\right)$ の項は，途中で打ち消し合っていることに注意されたい.

同様にして，第１期から第 t 期までの統合された予算制約式を導出すると

$$\begin{aligned}&(1+r_0)\,B_0^g+G_1+\frac{1}{1+r_1}G_2+\cdots+\left(\frac{1}{1+r_1}\cdots\frac{1}{1+r_{t-1}}\right)G_t \qquad (21)\\&\leq T_1+\frac{1}{1+r_1}T_2+\cdots+\left(\frac{1}{1+r_1}\cdots\frac{1}{1+r_{t-1}}\right)T_t\\&+\left(\frac{1}{1+r_1}\cdots\frac{1}{1+r_{t-1}}\right)B_t^g\end{aligned}$$

となる．この関係（21）は，任意の自然数 t について満足される．そこで t を無限に大きくした時の極限ケースを考える．ここで，仮定されている（15）より，右辺の最後の項を 0 に置き換えると，右辺はより大きくなる．したがって,（14）を得る． □

補題 2 を踏まえ，財政政策（または政府債務）が維持可能であることを次のように定義する.

定義 1 （財政政策の維持可能性）（15）が満たされるとき，財政政策（または政府債務）は長期的に維持可能であるという.

実際，Kondo (2007，2012a) など，多くの先行研究で，この定義が採用されている.

条件（15）が成り立たない（すなわち，財政政策が維持可能ではない）のはどのような状況かを考えてみよう．実質利子率の逆数がどんどん掛

け合わされているが，仮定 4 より，この各因子は 1 より小さい正の数である．ゆえに，この部分は政府債務の動学経路 $\{B_t^g\}$ の割引現在価値を 0 に引き寄せる作用を持つ．したがって，大雑把に言って，**条件（15）が成り立たないということは，政府債務が時間とともに実質利子率以上のスピードで無限大に発散することを意味する**．それは，“利子支払いを含めた借金を，新たに借金することによって返済している” ような状況である[6]．このような状況では，借金は雪だるま式に（利子率以上の速さで）膨らんでいき，(15)，つまり（14）は満たされなくなる．逆に，たとえ政府債務が無限大に発散するとしても，その発散速度が実質利子率未満の場合には，(15)，したがって（14）は満足される．（この点の例示として，第 5 節の数値例を見よ．）

4.2　財政政策の維持可能性のための条件

ここでは，前項での議論を踏まえ，政府債務が維持可能であるために，初期の利子つき政府債務残高 $(1+r_0)\,B_0^g$ が満たすべき条件を導出する．

補題 1 の（C）で政府債務の動学経路を導出したが，それを

$$B_t^g = \left(\frac{1+\theta}{\beta}\right)^{t-1} N_1(\tau_1 - g_1)\left[\frac{(1+r_0)\,B_0^g}{N_1(\tau_1 - g_1)} - \frac{1-[\beta\,(1+n)]^t}{1-\beta\,(1+n)}\right] \tag{22}$$

と書き換えておくと便利である．この変形は容易に確認できるであろう[7]．この（22）は，次節での政府債務経路の実際の計算にも便利である．

第 t 期の政府債務を表す（22）より，その現在価値を求める．補題 1 の（B）より，均衡実質利子率は時間にかかわらず常に $1+r = (1+\theta)/\beta$ なので，

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{1+r_1}\cdots\frac{1}{1+r_{t-1}}\right)B_t^g &= \left(\frac{\beta}{1+\theta}\right)^{t-1} B_t^g \\ &= N_1(\tau_1 - g_1)\left[\frac{(1+r_0)\,B_0^g}{N_1(\tau_1 - g_1)} - \frac{1-[\beta\,(1+n)]^t}{1-\beta\,(1+n)}\right]\end{aligned}$$

[6] これは，ポンジー・スキーム（Ponzi Scheme）が行われている状況である．ポンジーというのは，詐欺師として逮捕されたチャールズ・ポンジー (Charles Ponzi) 氏の名前である．

[7] 等比級数の有限和の公式

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^{N-1} = \frac{1-x^N}{1-x}$$

（ただし，$x \neq 1$，N はある自然数）を用いている．

となる．仮定 1 より，$t \to \infty$ のとき $[\beta(1+n)]^t \to 0$ なので，

$$\lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{1+r_1}\cdots\frac{1}{1+r_{t-1}}\right)B_t^g$$
$$= N_1(\tau_1 - g_1)\left[\frac{(1+r_0)B_0^g}{N_1(\tau_1-g_1)} - \frac{1}{1-\beta(1+n)}\right]$$

である．よって，条件（15）は，

$$(1+r_0)B_0^g \leq \frac{1}{1-\beta(1+n)}N_1(\tau_1-g_1)$$

と同値である．

この結果を定理の形でまとめておこう．

定理 2 （初期政府債務の長期的に返済可能な上限）
本稿のモデル設定の下で，政府の利子つき初期債務 $(1+r_0)B_0^g$ が，長期的予算制約（長期的維持可能性）と整合するための必要十分条件は，

$$(1+r_0)B_0^g \leq \frac{1}{1-\beta(1+n)}N_1(\tau_1-g_1)$$

である．

以下では，定理 2 の主張に現れている返済可能な政府の初期負債 $(1+r_0)B_0^g$ の上限を φ（ファイ）と書くことにする．

定義 2 （初期政府債務の維持可能な上限）

$$\varphi \equiv \frac{1}{1-\beta(1+n)}N_1(\tau_1-g_1) \tag{23}$$

この上限 φ の値が高まれば，それだけ政府の財政事情に余裕があることと解釈できる．

4.3 諸要因の財政政策の維持可能性に対する影響

本項では，前項で導出した政府債務の維持可能な上限 φ に対するいくつかの要因の影響を分析する.（それはとりもなおさず，財政政策の長期的維持可能性に対する影響の分析であると解釈できることは，前項の議論から明らかであろう.）

4.3.1　人口動態の影響

まずは，本稿の主眼である人口動態と財政の維持可能性の関係を調べる．ここでいう人口動態は，人口成長率 $1+n$ と人口規模 N_1 の 2 種類のパラメーターに体化されているのであった．

定理 2 または（23）を見ると，**人口成長率 $\mathbf{1+n}$ と人口規模 N_1 は，ともに返済可能な政府債務の上限 φ に対してプラスに作用する**．より厳密には，上限 φ を $1+n$ と N_1 で偏微分したとき，それらの符号はプラスとなることを確認できる．納税者数の時間を通じた増加率や納税者数そのものが増えれば，政府の財政事情は助かるというのは直感通りだろう．

反面，定理 2 または（23）からは，それらの上限 φ に対する作用の仕方には違いがあることも見てとれる．**返済可能な政府債務の上限 φ は，人口規模 N_1 に対しては線型に依存するが，人口成長率 $\mathbf{1+n}$ に関しては凸関数となる**.（人口成長率と上限 φ との関係については，下の図 1 も参照せよ.）ゆえに，**人口成長率は，高まれば高まるほど，その上限 φ に対するプラスの限界効果を増していく**.（ただしこの論文では，仮定 1 により，$0<1+n<1/\beta$ の範囲しか考察対象になっていない.）逆に，**人口成長率がかなり低い状態のときは，上限 φ に対する限界効果は低い**．そのようなときには，人口規模の方が上限 φ に対して強い効力を持つ．

簡単な数値例を用いて，人口成長率の上限 φ への影響を見てみよう．初期の人口規模，一人あたりのプライマリーバランス，家計の将来効用の割引因子を，それぞれ，$N_1=\tau_1-g_1=1$, $\beta=9/10$ とすると，政府債務の維持可能な上限は，

$$\varphi=\frac{10}{1-9n}$$

となる.（n の定義域は $-1<n<1/9$ である.）図示すると以下の通り．横軸には n，縦軸には φ をとっている．

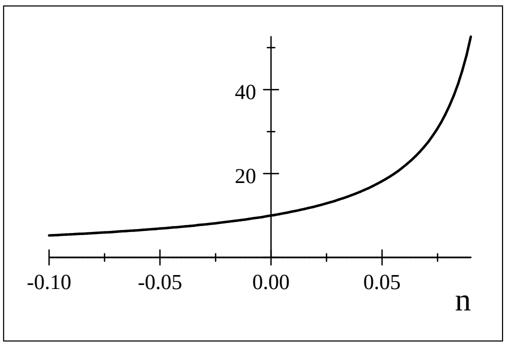

図 1

簡単な数学を用いて，人口成長率が微小量減少したとき，財政政策を維持可能に保つためには一人あたりの税収や人口規模がどれだけ変化する必要があるか，といった問題を考察することもできる．この点については，Kondo (2012a) の Theorem 3 を見よ．

4.3.2 生産性上昇率の影響

次に，生産性上昇率の上限 φ への影響を調べる．上限 φ の定義式（23）を見ると，それは（一人あたりの）生産性上昇率 $1+\theta$ に依存していない．**予想された生産性の上昇は，返済可能な政府債務の上限 φ に影響を与えない**のである．(8）や（9）に示される通り，生産性の上昇は，GDP の成長や税収の増加にはつながるにもかかわらずである．これは，生産性の上昇が実質利子率の上昇に結びついてしまい（補題 1 の（B）を見よ），政府の利払い負担を増加させる効果を持つからである[8]．

ただし，**予期していなかった生産性の上昇は，上限 φ に対してプラスの効果を持つ**．前期から今期にかけての実質利子率に，今期の消費財の供給量が増すことが反映されていないからである．そのプラス効果を調べてみよう．第 1 期に予想外に一人あたりの生産性 $1+\theta$ が上昇しており，プライマリーバランスも改善された状況を描写したいので，$\tau_1 - g_1 = (1+\theta)(\tau_0 - g_0)$ という関係を用いて φ を書き換えると，

$$\varphi = \frac{1+\theta}{1-\beta(1+n)} N_1(\tau_0 - g_0)$$

となる．これを $1+\theta$ で偏微分して

$$\frac{\partial\varphi}{\partial(1+\theta)} = \frac{1}{1-\beta(1+n)} N_1(\tau_0 - g_0) \tag{24}$$

を得る．第 1 期において，前期からの生産性およびプライマリーバランスが予想外に微小量上昇していたとき，返済可能な政府債務の上限は（24）だけ上昇するのである．逆に，予想外に生産性上昇率やプライマリーバランスが減少すると，政府の財政事情は,（上限 φ の値が低下するという意味で）悪化する．

本項で得られた重要な結果を，定理としてまとめておく．

[8] もちろんモデルの設定を一般化すれば，このような強い結論は成り立たないだろう．しかしながら,「予想された生産性の上昇は，利子率に織り込まれ政府の利払い負担を増すので，累積債務に悩む政府の財政事情の助けにはあまりならない」というここでのメッセージは，示唆に富むものではないだろうか．

定理 3 （人口動態と生産性上昇率の政府債務の返済可能性への影響）

人口成長率 $1+n$ と人口規模 N_1 は，ともに返済可能な政府債務の上限 φ に対してプラスに作用する．

返済可能な政府債務の上限 φ は，人口規模 N_1 に対しては線型に依存するが，人口成長率 $1+n$ については凸関数となる．

予想された生産性の上昇は，返済可能な政府債務の上限 φ に影響を与えない．一方，予想されていなかった生産性の上昇は，上限 φ に対してプラスの効果を持つ．

5 数値例

この節では，パラメーターの値を特定化し，政府債務の動学経路のグラフを描いてみる．維持可能な経路と維持不可能な経路の違い，そして人口動態のそれへの影響などを幾何学的に分析する試みである．（そのような目的から，現実経済との関連性には，必ずしも配慮していない．）人口成長率と人口規模の影響を個別に調べていく．

5.1 人口成長率の影響

まずは，人口成長率の影響である．次のように，パラメーターの値を決める：$N_1 = \tau_1 - g_1 = 1$，$1+\theta = 1.05$，$\beta = 0.9$．このとき，$1+r = 7/6 (\fallingdotseq 1.17)$ である．さらに，$(1+r_0)\, B_0^g = 10$ とする．

ここで，人口成長率が，次の 3 パターン

$$1+n_1 = \frac{17}{18}\,(\fallingdotseq 0.94)\,, \qquad 1+n_2 = 1, \qquad 1+n_3 = \frac{19}{18}\,(\fallingdotseq 1.06)\,,$$

の場合を考える．政府債務の返済可能な上限とその維持可能性について，人口成長率が $1+n_1$ のときは，$\varphi_1 = 20/3\,(< (1+r_0)\, B_0^g = 10)$ なので政府債務は維持不可能，$1+n_2$ のときは $\varphi_2 = 10$ なので政府債務はギリギリ維持可能，$1+n_3$ のときは $\varphi_3 = 20$ なので政府債務は余裕を持って維持可能である．

政府債務動学は，(22）より計算すると，それぞれ次のようになる．

$$
\begin{aligned}
1+n_1\text{のとき}\quad B_t^g &= \frac{17}{3}\left(\frac{119}{120}\right)^{t-1} + \frac{10}{3}\left(\frac{7}{6}\right)^{t-1} \\
1+n_2\text{のとき}\quad B_t^g &= 9\left(\frac{21}{20}\right)^{t-1} \\
1+n_3\text{のとき}\quad B_t^g &= 19\left(\frac{133}{120}\right)^{t-1} - 10\left(\frac{7}{6}\right)^{t-1}
\end{aligned}
$$

これらの式は任意の自然数 $t = 1, 2, \cdots$ について満足される．これらに対応する政府債務動学のグラフは，図 2 の，それぞれ細字，中字，太字で描かれている．

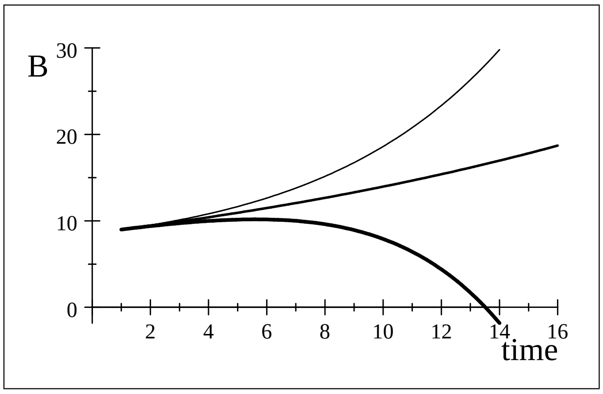

図 2

太字のグラフ（人口増加のケース）から細字のグラフ（人口減少のケース）へと順に見てみよう．これらの曲線群は，他の条件を一定としたまま少子化が進行（人口成長率が減少）したときの，政府債務の時間を通じた動きの変化である．最初（太字のグラフ）は，上に有界な動きを表している．それがやがて，少子化の進展とともに，実質利子率を上回る速いスピードでプラス無限大へ発散する（雪だるま式に借金が膨らんでいく）ようになる（細字）プロセスを見てとることができる．

人口成長率が $1+n_2$ のとき，政府債務は，ギリギリではあるが維持可能であった．にもかかわらず，その場合の政府債務の動学経路（中字のグラフ）は，時間とともに $+\infty$ に発散する．第 4.1 節の最後で指摘したように，**政府債務の維持可能性とそれが無限大へ発散することは両立しうる**のである．ただし，この場合の発散速度は，21/20 (= 1.05) なので，実質利子率 ($\fallingdotseq$ 1.17) よりも緩やかである．したがって，政府債務の現在価

値の動学は，時間の経過とともに0に収束する．(政府債務は，現在価値でさえも有限期間内に0に到達するわけではないことにも注意されたい．)

3つのケースそれぞれの政府債務の現在価値経路について調べてみよう．3つのケースのそれぞれについて，それは以下の式で表される．

$$
\begin{aligned}
1+n_1\text{のとき} \quad & \left(\frac{6}{7}\right)^{t-1} B_t^g = \frac{17}{3}\left(\frac{119}{140}\right)^{t-1} + \frac{10}{3} \to \frac{10}{3} \\
1+n_2\text{のとき} \quad & \left(\frac{6}{7}\right)^{t-1} B_t^g = 9\left(\frac{9}{10}\right)^{t-1} \to 0 \\
1+n_3\text{のとき} \quad & \left(\frac{6}{7}\right)^{t-1} B_t^g = 19\left(\frac{133}{140}\right)^{t-1} - 10 \to -10
\end{aligned}
$$

十分に時間が経過したときの収束先も併せて書いてある．政府債務が維持不可能な場合，ギリギリ維持可能な場合，余裕を持って維持可能な場合の3パターンに対応して，政府債務の現在価値経路の収束先は，それぞれ，プラス，0，マイナスとなっている．これらのグラフを描いたのが下の図3である．縦軸のB(PV)とは，政府債務B_t^gの割引現在価値（Present Value）を表している．

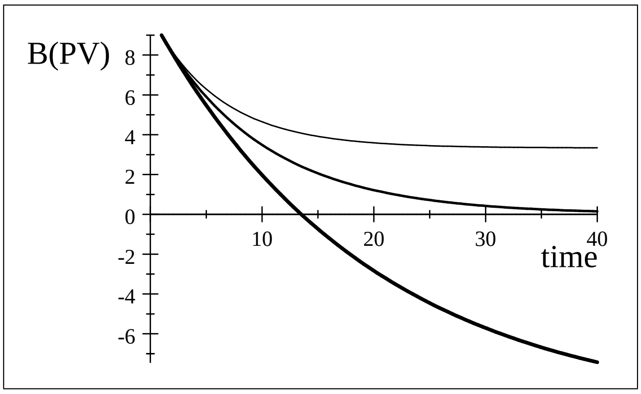

図3

5.2　人口規模の影響

次に，人口規模の政府債務動学への影響を調べる．次のように，パラメーターの値を決める：$1+n = \tau_1 - g_1 = 1$, $(1+r_0)\,B_0^g = 10$, $1+\theta = 1.05$, $\beta = 0.9$. 人口成長率を除くと前項と同じである．このとき，$1+r = 7/6(\fallingdotseq 1.17)$ であった．

ここで，第 1 期の人口規模が，次の 3 パターン

$$N_1 = \frac{9}{10}, \qquad N_2 = 1, \qquad N_3 = \frac{11}{10},$$

の場合を調べる．政府債務の返済可能な上限とその維持可能性について，最初の N_1 のときは $\varphi_4 = 9\,(< (1+r_0)\,B_0^g = 10)$ なので政府債務は維持不可能，N_2 のときは $\varphi_5 = 10$ なので政府債務はギリギリ維持可能，N_3 のときは $\varphi_3 = 11$ なので政府債務は余裕を持って維持可能である．

政府債務動学は,（22）より，それぞれ次のようになる．

$$\begin{aligned}
&N_1\text{のとき} \quad B_t^g = \left(\frac{7}{6}\right)^{t-1} + \frac{81}{10}\left(\frac{63}{60}\right)^{t-1} \\
&N_2\text{のとき} \quad B_t^g = 9\left(\frac{21}{20}\right)^{t-1} \\
&N_3\text{のとき} \quad B_t^g = \frac{99}{10}\left(\frac{63}{60}\right)^{t-1} - \left(\frac{7}{6}\right)^{t-1}
\end{aligned}$$

これらは任意の自然数 $t = 1, 2, \cdots$ について満足される．これらに対応する政府債務動学のグラフは，図 4 の，それぞれ細字，中字，太字で描かれている．

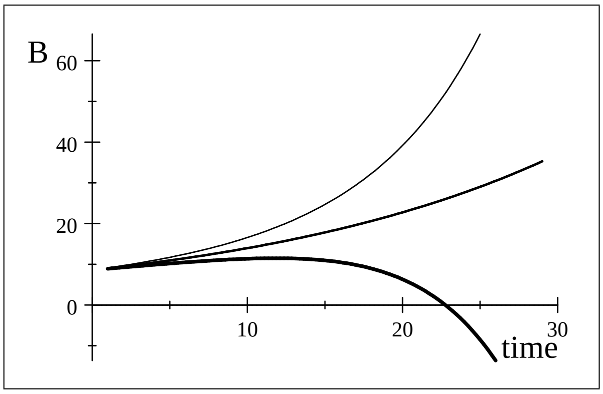

図 4

前項と同様に，3 つのケースそれぞれについて政府債務の現在価値経路

を調べると，それぞれ以下のようになる．

$$
\begin{aligned}
&N_1\text{のとき}\quad \left(\frac{6}{7}\right)^{t-1} B_t^g = 1 + \frac{81}{10}\left(\frac{9}{10}\right)^{t-1} \to 1 \\
&N_2\text{のとき}\quad \left(\frac{6}{7}\right)^{t-1} B_t^g = 9\left(\frac{9}{10}\right)^{t-1} \to 0 \\
&N_3\text{のとき}\quad \left(\frac{6}{7}\right)^{t-1} B_t^g = \frac{99}{10}\left(\frac{9}{10}\right)^{t-1} - 1 \to -1
\end{aligned}
$$

収束先を併せて書いてある点も前項と同様である．政府債務が維持不可能な場合，ギリギリ維持可能な場合，余裕を持って維持可能な場合の 3 パターンに対応して，政府債務の現在価値経路の収束先は，それぞれ，プラス，0，マイナスとなる．これらのグラフを描いてみると下のようになる．

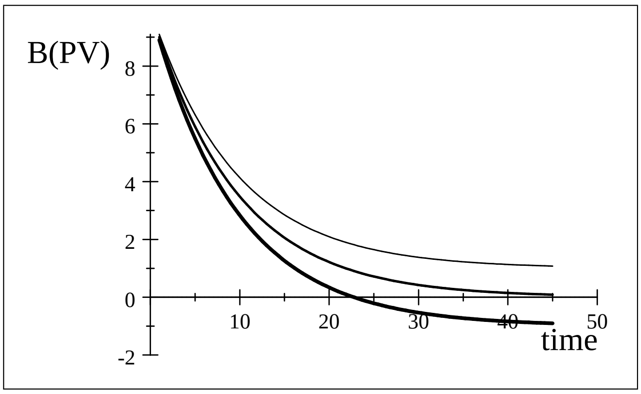

図 5

6　結語

本稿では，シンプルな動学的一般均衡モデルを用いて，主に人口動態と財政政策の維持可能性を研究した．まず，政府債務の動学経路を導出し，それに対する人口動態の影響を分析した．次に，財政政策が長期的に維持可能とはどういうことかを定義し，その条件と整合する政府の初期負債の上限を導出した．その上限が人口動態や生産性上昇率にどのように依存するかも検討した．その上限は，人口規模に対しては線型に依存するが，人口成長率に対しては凸関数となる．生産性上昇率に関しては，事前に予想されたショックか否かが，返済可能な初期政府負債の上限への影響にとり，決定的に重要であった．また，数値例を与えて，政府債

務の動学経路を描出し，人口動態のその経路に対する効果を視覚的に分析した．

政府債務の維持可能性の確保は，現代日本（をはじめいくつかの先進国）の火急の課題である．その問題への一つのアプローチとして，本稿の分析は，エコノミストや政策担当者の方々にとり有用であると期待したい．反面，本稿では射程外に置かれている，いくつかの重要なトピックも存在する．

第 1 に，物的資本の蓄積である．本稿のモデルには物的資本は（明示的には）出てこない．これは，現代の日本経済にとっては，資本蓄積よりも累積政府債務問題の方が重要だという筆者の認識による．分析を簡単化するための有用な仮定でもあった．物的資本の存在も考慮した展開は，今後の課題である．政府債務と物的資本の比率が時間を通じてどう推移するかなどは，興味深い研究テーマとなろう．

第 2 に，インフレーションやデフレーションなどの貨幣的現象を分析できていない．現代の日本経済にとり，これも欠くことのできない重要なトピックである．少子化がデフレーションの一因であるかのような発言もエコノミストの間では散見されるが，その経済理論的な根拠は明らかではない．将来的には，ここで展開した分析に貨幣を導入し，そのような問題にも挑戦してみたい．

第 3 に，開放経済体系における人口動態と財政危機の関係を分析できていない．例えば，中国では一人っ子政策が一部で見直されているようだが，外国の人口動態が自国の財政事情に及ぼす影響などは，興味深い研究テーマである．今後の課題としたい．

参考文献

[1] 加藤和久（2010）:「財政の持続可能性と財政運営の評価」，井堀利宏編『財政政策と社会保障』（慶応義塾大学出版会），3-38.

[2] Barro, R. J. and Becker, G. S. (1989): “Fertility Choice in a Model of Economic Growth,” *Econometrica* 57, 481–501.

[3] Becker, G. S. and Barro, R. J. (1988): “A Reformulation of the Economic Theory of Fertility,” *Quarterly Journal of Economics* 103, 1–25.

[4] Benhabib, J. and Nishimura, K. (1989): "Endogenous Fluctuations in the Barro-Becker Theory of Fertility," in *Demographic Change and Economic Development*, Wening, A. and K. F. Zimmermann (eds.), Springer-Verlag.

[5] Bohn, H., (1998): "The Behavior of U. S. Public Debt and Deficits," *Quarterly Journal of Economics*, 113, 949-963.

[6] Broda, C. and Weinstein, D.E. (2005): "Happy News from the Dismal Science: Reassessing the Japanese Fiscal Policy and Sustainability," in Takatoshi Ito, Hugh Patrick and David E. Weinstein(eds.), Reviving Japan's Economy, The MIT Press, 39-78.

[7] Domar, E. D. (1944): "The "Burden of the Debt" and the National Income," *American Economic Review*, Vol. 34, No. 4, 798-827.

[8] Fincke, B. and Greiner, A. (2012): "How to Assess Debt Sustainability? Some Theory and Empirical Evidence for Selected Euro Area Countries," *Applied Economics*, Vol. 44, No. 28, 3717-3724.

[9] Fukuda, S. and Teruyama, H. (1994): "The Sustainability of Budget Deficits in Japan," *Hitotsubashi Journal of Economics*, 35, 109-119.

[10] Ghosh, S. and Mourmouras, I. A. (2004): "Endogenous growth, welfare and budgetary regimes," *Journal of Macroeconomics*, Vol. 26, No. 4, 623-635.

[11] Greiner, A. and Semmler, W. (2000): "Endogenous growth, government debt and budgetary regimes," *Journal of Macroeconomics*, Vol. 22, Issue 3, 363-384.

[12] Greiner, A., Koeller, U. and Semmler, W. (2007): "Debt Sustainability in the European Monetary Union: Theory and Empirical Evidence for Selected Countries," *Oxford Economic Papers*, Vol. 59, 194–218.

[13] Groneck, M. (2010): "A Golden Rule of Public Finance or a Fixed Deficit Regime? Growth and Welfare Effects of Budget Rules," *Economic Modelling*, 27, 523-534.

[14] Hamilton, J. D. and Flavin, M. A. (1986): "On the Limitations of Government Borrowing: A Framework for Empirical Testing," *American Economic Review*, 76, 808-816.

[15] Ihori, T., Doi, T. and Kondo, H. (2001): "Japanese Fiscal Reform: Fiscal Reconstruction and Fiscal Policy," *Japan and the World Economy*, 13, 351-370.

[16] Kondo, A. (2007): "On the Sustainability of Government Borrowing in a Dynamic General Equilibrium," *Pacific Economic Review*, 12, No. 5, 565-576.

[17] Kondo, A. (2012a): "A Note on Public-Debt Sustainability in an Economy with Declining Fertility," *FinanzArchiv/Public Finance Analysis*, Vol. 68, No. 2, 153-164.

[18] Kondo, A. (2012b): "Short- and Long-term Effects of Economic Growth on Public Debt Dynamics," CRR Discussion Paper Series B-6, Faculty of Economics, Shiga University.

[19] Kondo, A. and Kitaura, K. (2009): "Does Deflation Impinge on a Government's Fiscal Standing?" *Pacific Economic Review*, 14, No. 5, 651-656.

[20] Kondo, A. and Kitaura, K. (2012): "International Linkage of Inflation Rates in a Dynamic General Equilibrium," forthcoming in *Journal of Economics*.

[21] Neumeyer, P., and Yano. M. (1995): "Cross Border Nominal Asset and International Monetary Interdependence," University of Southern California, Los Angeles, California, manuscript.

[22] Sakuragawa, M. and Hosono, K. (2010): "Fiscal Sustainability of Japan: A Dynamic General Equilibrium Approach," *Japanese Economic Review*, Vol. 61, No. 4, 517-537.

[23] Solow, R. (1956): "A Contribution to the Theory of Economic Growth: A Contribution to the Theory of Economic Growth," *Quarterly Journal of Economics*, 70, 65-94.

[24] Trehan, B. and Walsh, C. E. (1988): "Common trends, the government's budget constraint, and revenue smoothing," *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol. 12, No. 2-3, 425-444.

[25] Trehan, B. and Walsh, C. E. (1991): "Testing Intertemporal Budget Constraints: Theory and Applications to U.S. Federal Budget and Current Account Deficits," *Journal of Money, Credit and Banking*, Vol. 23, No. 2, 206-23.