CRR DISCUSSION PAPER SERIES J

Discussion Paper No. J-51

相似拡大的頑健効用と2ファクター・ハル・ホワイト型本質的アフィン証券市場モデルに基づく生命保険の多期間最適運用問題に対する近似解析解

楠田浩二

2014年12月

Center for Risk Research
Faculty of Economics
SHIGA UNIVERSITY

1-1-1 BANBA, HIKONE,
SHIGA 522-8522, JAPAN

滋賀大学経済学部附属リスク研究センター
〒522-8522 滋賀県彦根市馬場 1-1-1

相似拡大的頑健効用と 2 ファクター・ハル・ホワイト型本質的アフィン証券市場モデルに基づく生命保険の多期間最適運用問題に対する近似解析解

楠田　浩二 [1]

滋賀大学経済学部

概 要

生命保険会社は短期から超長期までの異なる満期と予定利率から構成される複雑な期間構造の債務を抱えている一方、短期から超長期までの概ね全満期に亘る国債を中心に投資している為、これらの債務・資産の時価を変動させる将来のイールド・カーブの変動を織り込んだ最適長期投資は従来の難問である。加えて、世界金融危機を契機に将来の諸事象の確率分布自体が不明な「ナイトの不確実性」下で「最悪確率」を想定した投資の頑健最適化の必要性が高まっている。楠田 (2013) はナイトの不確実性下「相似拡大的頑健効用」（Maenhout (2004)）を所持する生命保険会社が生命保険を株式指数と全満期の国債で頑健運用する生保頑健運用モデルを提案している。しかし同モデルでは、証券価格がリスクの市場価格一定の「完備アフィン・モデル」に従うと仮定されている為、現実の証券価格の変動を的確に捉え難いという難点がある。最近になって、リスクの市場価格が状態変数のアフィン関数に一般化された「本質的アフィン・モデル」の下で消費と証券投資の多期間最適化問題に対し楠田・菊池（2014）は近似解析解を与えている。本稿では、生命保険を特殊な「証券」に見立て、生命保険会社の生命保険債務を「生命保険証券」の空売り投資と見做し、生命保険会社のポートフォリオに組み込むという新たな接近法によって、楠田（2013)、楠田・菊池（2014）の消費と証券投資の頑健最適化モデルの枠組みの中で生保頑健運用モデルを構築する。

キーワード: ALM、確率制御、近似解析解、金利リスク、生命保険、頑健効用、2 ファクター・モデル、ナイトの不確実性、ポートフォリオ最適化

JEL 分類番号: C62、D14、G11

1　序論

生命保険会社は、短期から超長期までの異なる満期と異なる予定利率から構成される複雑な期間構造の債務を抱えている為、イールド・カーブの変化に応じて生命保険会社の時価債務は時々刻々変動している。勿論、短期から超長期までの国債購入によるデュレーション・マッチングを行えば保険債務の確実な履行は出来るが、このとき、運用収益率は大幅に低下し、予定利率の低下や役職員給与の引下げを余儀なくされよう。しかし、運用収益率の向上を企図して株式・外国国等のリスクの高い証券の投資比率を高めれば、保険債務の確実な履行の為のリスク管理が困難となる。

他方、1990 年代初頭の我が国、北欧におけるバブル崩壊、先般の世界金融危機は金融機関のリスク管理の不備が各国経済、状況によっては世界経済までを不安定化することを如実に示すとともに、金融機関のリスク管理技術の一層の向上が経済安定化の為の重要な課題であることを浮き彫りにしている。こうした中、「ナイトの不確実性」(Knight (1921)) 下の「モデル・リスク（下振れリスク）」に対し頑健な投資決定・リスク管理等を行う必要性が認識されるようになっている。

前者の問題に関しては、Campbell and Viceira (2002) が、CRRA 効用を所持する投資家がバシチェック金利モデルの下で安全証券と一定満期の国債に投資する多期間最適化問題に近似解析解を示している。後者の問題に関しては、Maenhout (2004) が「頑健効用」（Anderson, Hansen, and Sargent (2003)）に効用関数の有すべき望ましい性質とされる「相似拡大性」を付与すべく改良した「相似拡大的頑健効用」を提案し、ナイトの不確実性下で相似拡大的頑健効用を所持する投資家が一定金利の下、安全証券と株式に投資する多期間最適化問題に解析解を与えている。

[1] kusuda@biwako.shiga-u.ac.jp

本研究は JSPS 科研費 26380392 の助成を受けたものであり、滋賀大学経済学部附属リスク研究センター東アジア保険プロジェクトにおける中国東北財経大学金融学院との共同研究の成果の一部である。尚、本研究の過程では、滋賀大学経済学部久保英也教授及び菊池健太郎講師に多大且つ有益な御指摘を賜った。ここに特筆して厚く感謝申し上げる。

楠田 (2013) は、ナイトの不確実性下、相似拡大的頑健効用を所持する投資家が株式指数と全満期の国債を投資対象とする多期間最適化問題を考察している。楠田（2013）は短期金利と平均短期金利を状態変数とし、リスクの市場価格が状態変数のアフィン関数で表される 2 ファクター・ハル・ホワイト型「本質的アフィン・モデル」（Duffee(2002)）を仮定して、確率制御により必要条件である HJB 方程式から最適投資比率等の近似解析解を導出している。しかし、同近似解析解では、値関数を構成する状態変数（短期金利と平均短期金利）の関数における未知の 6 係数は 6 元連立非線形方程式の解として与えられているが、同解は一般に複数存在する。従って、同連立方程式に複数解が存在する場合は、何れが真の最適解であるかを見極める必要が生じる。そこで楠田 (2013) は、リスクの市場価格を一定と仮定した「完備アフィン・モデル」（Duffee(2002)）を改めて仮定することで 2 個の近似解析解を導出している。しかし、完備アフィン・モデルでは、リスクの市場価格が一定という制約的な仮定が置かれている為、現実の証券価格の変動を捉えることが困難である。

最近になって、楠田・菊池（2014）は、Maslowski and Veverka (2014) が時点効用関数の割引現在価値の無限時間までの積分の期待値として表される標準的な効用汎関数を最大化する問題に対し十分条件を導出していることに着目した。楠田・菊池（2014）は相似拡大的頑健効用最大化問題における頑健制御の為の最小化問題を解き終わった後の最大化問題が元の問題と同一の HJB 方程式を導くように定式化することにより、本問題を Maslowski and Veverka (2014) の枠組みに位置付け、十分条件を導出している。すなわち、「本質的アフィン・モデル」において導出された上記連立方程式に複数の解が存在した場合、同十分条件を満たす解が真の最適解ということになる。

本稿では、ナイトの不確実性下、各期の基礎利益に基づく相似拡大的頑健効用を所持する生命保険会社が生命保険を株式指数と全満期の国債を投資対象として運用する効用最大化問題を考察する。生命保険を特殊な「証券」に見立て、生命保険会社の生命保険債務を「生命保険証券」の空売り投資と見做し、生命保険会社のポートフォリオに組み込むという新たな接近法によって本問題を楠田・菊池 (2014) の枠組みの中に位置付ける。その際、楠田・菊池 (2014) における状態変数（短期金利と平均短期金利）の未知関数の偏微分方程式が状態変数の 2 次関数となる構造を保持すべく生命保険債務の構造を特定化することによって本問題を楠田・菊池 (2014) の枠組みの中で解き得ることを示す。

本稿の次章以降の構成は次の通りである。2 章では、生命保険頑健運用モデルを紹介する。3 章では、相似拡大的頑健効用下の生命保険会社の最適頑健運用問題の近似解析解を導出する。

2 生命保険頑健運用モデル

本章では、ハル・ホワイト型 2 ファクター本質的アフィン証券市場モデル等の市場環境と生命保険会社の最適頑健運用問題を説明し、生命保険販売を生命保険空売り投資と見做し、ポートフォリオに組み込む新たな接近法を呈示する。而して、同接近法により、本問題を楠田（2013）、楠田・菊池（2014）の消費と証券投資の頑健最適化モデルの枠組みに位置付けられることを示す。

2.1 市場環境

無限連続時間の摩擦の無い証券市場経済を考察する。投資家共通の尤も有り得べき確率測度と情報構造は完備フィルター付き確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$ によりモデル化されている。ここで、$\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,\infty)}$ は 2 次元標準ブラウン運動 z によって生成される自然なフィルター付けである。確率測度 P の下での期待作用素を E と表記する。株式指数と額面 1 円の割引国債が任意の時点で市場で取引されている。割引国債は任意の時点で発行されており、発行時点の満期までの期間は $(0, \bar{\tau}]$ の任意の期間である。株式指数の価格を S、満期 T の割引国債の価格を B^T と表記する。

金利の変動過程については、不況リスクに加え長期投資リスクである長期停滞リスクを捉える為、平均金利の変動を織り込んだ「2 ファクター・ハル・ホワイト・モデル」(Hull and White (1994)) を仮定する。[1] ま

[1]金利のイールド・カーブの変動については、主成分分析から、長短金利の平行移動 (parallel shift)、捩れ (twist)、歪み (curvature)

た、リスクの市場価格については、状態変数 $(r_t, \bar{r}_t)$ のアフィン関数と仮定された「本質的アフィン・モデル」（Duffie and Kan (1996)）を仮定し、株式指数の収益率のボラティリティは一定と仮定する。

仮定 1. 証券価格は次の仮定に従う。

1. 瞬間的スポット・レート r は次の確率過程に従う。

$$dr_t = \kappa(\bar{r}_t - r_t)\,dt - \sigma\,dz_{1t} \tag{2.1}$$

$$d\bar{r}_t = \bar{\kappa}(\bar{r} - \bar{r}_t)\,dt - \sum_{i=1}^{2} \bar{\rho}_i\,\bar{\sigma}\,dz_{it} \tag{2.2}$$

ここで、κ は瞬間的スポット・レートの平均金利過程 $\bar{r}_t$ への回帰速度、σ は拡散係数、$\bar{\kappa}$ は平均金利過程の平均金利 $\bar{r}$ への回帰速度、$\bar{\sigma}$ は拡散係数をそれぞれ表す正の定数である。また、$\bar{\rho}_1, \bar{\rho}_2 \in [-1, 1]$ で、$\bar{\rho}_1$ は金利変化 dr_t と平均金利変化 $d\bar{r}_t$ の相関を表しており、$\bar{\rho}_1^2 + \bar{\rho}_2^2 = 1$ を満たしている。

2. リスクの市場価格 λ は短期金利と平均短期金利のアフィン関数である。

$$\lambda_{it} = \lambda_i + \lambda_{i1} r_t + \lambda_{i2} \bar{r}_t \qquad i = 1, 2 \tag{2.3}$$

ここで、$\lambda_i, \lambda_{i1}, \lambda_{i2}$ は定数である。

3. 株式指数の収益率のボラティリティは (v_1, v_2) である。ここで、v_i は dz_{it} に対応するボラテリティである。

以下では、瞬間的スポット・レート r_t を「短期金利」、平均金利過程 br_t を「平均短期金利」、平均金利 $\bar{r}$ を「長期平均短期金利」と呼ぶ。

このとき、株式指数と割引国債の無裁定価格について、次の補題が導かれる。

補題 1. 仮定 *1* の下、株式指数 S と満期 T の割引債の無裁定価格 B^T は次の確率微分方程式に従う。

$$\frac{dS_t}{S_t} = \left(r_t + \sum_{i=1}^{2} v_i \lambda_{it}\right) dt + \sum_{i=1}^{2} v_i\,dz_{it} \tag{2.4}$$

$$\frac{dB_t^T}{B_t^T} = \left(r_t + \sum_{i=1}^{2} \sigma_i(\tau) \lambda_{it}\right) dt + \sum_{i=1}^{2} \sigma_i(\tau)\,dz_{it} \tag{2.5}$$

ここで、$\tau = T - t$ で、

$$\begin{pmatrix} \sigma_1(\tau) \\ \sigma_2(\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma & \bar{\rho}_1 \bar{\sigma} \\ 0 & \bar{\rho}_2 \bar{\sigma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \end{pmatrix} \tag{2.6}$$

ここで、(b_1, b_2) は次の非斉次の定数係数線形連立常微分方程式の境界値問題の解析解である。

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa + \sigma\lambda_{11} & \bar{\sigma} \sum_{i=1}^{2} \bar{\rho}_i \lambda_{i1} \\ -\kappa & \bar{\kappa} + \bar{\sigma} \sum_{i=1}^{2} \bar{\rho}_i \lambda_{i2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.7}$$

境界条件：$b_1(T) = b_2(T) = 0$

証明. 楠田 (2013) の補論 A.1 参照。 □

の 3 成分で 99%以上が説明できるとされている。特に、平行移動成分が 80〜90%、これに捩れ成分を加えると、90〜95%の説明力を持つとされている。

2.2 生命保険会社の生命保険運用問題

生命保険会社は一般に死亡保険、生存保険、生死混合保険、医療保険等を販売している。我が国では、医療保険等の積立金額・運用残高は小さいので、生命保険会社の生命保険運用問題を考察する本稿では、死亡保険、生存保険、生死混合保険の 3 種の生命保険を対象とすれば十分である。また、生死混合保険は死亡保険と生存保険の混合保険なので、畢竟、生命保険会社のこれら 3 種の生命保険の販売に基づく保険料収入と解約返戻金・保険金等債務は生死混合保険で代表される。そこで本稿では、生死混合保険の代表的商品である養老保険を対象とする。

今、相互会社形態の生命保険会社（以下、「生保」）が一定年齢を満期とする契約期間 $\bar{\tau}$ 年、満期保険金が一口 1 円の一時払い養老保険を販売している。当該養老保険の予定利率・予定死亡率・予定事業費率、解約時の解約返戻金、死亡時の保険金については、次の仮定を置く。

仮定 2. *1.* 生保は当該養老保険の保険料を予定利率・予定死亡率・予定事業費率（連続複利ベース）が満期までの期間 $\bar{\tau}$ の国債の利率から一定率 ι'（同）引き下げた利率となるように設定して販売している。すなわち、時点 t における当該養老保険の保険料は一口 $e^{\iota'\bar{\tau}}B_t^{t+\bar{\tau}}$ 円に設定されている。

2. 契約者が時点 t で満期までの期間 τ の養老保険を解約した場合、一口当り $e^{\iota'\tau}B_t^{t+\tau}$ 円の解約返戻金が支払われる。

3. 被保険者が時点 t に満期までの期間 τ を残して死亡した場合は、受取人に満期保険金（一口当り *1* 円）が支払われる。

被保険者が時点 t に満期までの期間 τ を残して死亡した場合に受取人に支払われる一口当りの満期保険金 1 円は養老保険における生存保険金（解約）価値 $e^{\iota'\tau}B_t^{t+\tau}$ 円と死亡保険金価値 $(1-e^{\iota'\tau}B_t^{t+\tau})$ 円の合計金額と解釈出来る。先ず、後者の死亡保険金支払いを除いた養老保険を考察する。このとき、生保は満期までの期間 τ の養老保険の各時点 t における販売と解約返戻金・保険金支払いを通じて市場価値

$$L_t^{t+\tau} := e^{\iota'\tau}B_t^{t+\tau} \tag{2.8}$$

円の証券を売買していると見做せる。すなわち、生保の当該養老保険販売は一口当り $e^{\iota'\bar{\tau}}B_t^{t+\bar{\tau}}$ 円の当該証券を空売りしており、当該養老保険解約時返戻金・死亡時保険金 $e^{\iota'\tau}B_t^{t+\tau}$ の支払いは当該証券の市場価値での買戻しと見做せる。そこで以下では、当該養老保険を当該生命保険会社のみが空売り出来、契約者・受取人のみが当該生保に解約時・死亡時に随時買戻しを請求出来る特殊な店頭売買証券に見立てる。このとき、満期 T の生命保険証券の市場価格 L^T について、(2.8) 式を微分し、(2.5) 式を用いると、次の SDE が得られる。

$$\frac{dL_t^T}{L_t^T} = \left(r_t + \sum_{i=1}^{2}\sigma_i(\tau)\lambda_i - \iota'\right)dt + \sum_{i=1}^{2}\sigma_i(\tau)\,dz_{it} \tag{2.9}$$

当該養老保険を証券に見立てると、生保は当該養老保険の販売と解約返戻金・保険金支払いを通じて、満期までの期間 $[0,\bar{\tau}]$ の養老保険証券群の空売りポートフォリオを組成していると見做せる。

満期までの期間 $[\tau,\tau+d\tau]$ の養老保険の時点 t における富 W_t に対する保険債務比率（空売り投資比率）を $\psi_t(\tau)d\tau$ と表記する。すなわち、$\psi_t(\tau)$ は保険債務比率密度過程を表している。保険債務比率密度過程は、分母の富の成長率、分子の保険債務残高を減少させる死亡率と解約率に依存する。富の成長率に関する項と死亡率に関する項は時刻と満期までの期間の 2 変数関数と仮定する。解約率に関する項は、解約率が高金利であるほど、また満期までの期間が長いほど高まる、と考えられる。但し、ここで高金利とは、短期金利 r_t が平均短期金利 $\bar{r}_t$ を上回っている状態と平均短期金利 $\bar{r}_t$ が平均金利 $\bar{r}$ を上回っている状態が存在する。平均金利は定数なので、楠田 (2013) のモデルにおける状態変数の 2 次関数構造及び近似解析解の導出可能性を確保する為、解約率を満期までの期間の関数を係数とする短期金利と平均短期金利のアフィン関数と仮定する。

仮定 3. 保険債務比率密度過程 $\psi_t(\tau)$ は次式に従う。

$$\psi_t(\tau) = \psi_1(\tau) + \psi_2(\tau) r_t + \psi_3(\tau)\bar{r}_t \tag{2.10}$$

ここで、$\psi_i(\cdot)$ $(i = 1, 2, 3)$ は区間 $[0, \bar{\tau}]$ における可積分関数である。

各期 $[t, t + dt]$ における満期までの期間 $[\tau, \tau + d\tau]$ の死亡保険金支払い総額を考察するため、当該死亡保険金の契約口数を $\zeta_t(\tau) d\tau dt$ と表記する。被保険者の死亡率は一般に年齢の増加関数とされているので、満期までの期間の或る減少関数 $\varepsilon_1(\tau)$ で表されると仮定する。このとき、各期 $[t, t + dt]$ における満期までの期間 $[\tau, \tau + d\tau]$ の死亡保険金支払い総額は $\varepsilon_1(\tau)\zeta_t(\tau)(1 - B_t^{t+\tau}) d\tau dt$ と表される。これは次のように書き換えられる。

$$\varepsilon_1(\tau)\zeta_t(\tau)(1 - B_t^{t+\tau}) d\tau dt = \varepsilon_1(\tau) \left(\frac{1}{B_t^{t+\tau}} - 1 \right) \psi_t(\tau) W_t d\tau dt$$

上式右辺の $(1/B_t^{t+\tau} - 1)$ は短期金利と平均短期金利の関数であり、且つ満期までの期間の増加関数である。死亡保険の積立金額・運用残高は生存保険に比べて著しく小さく、積立金額・運用残高全体に対する占率が著しく小さいことを考慮し、短期金利と平均短期金利の変動を無視するほか、満期までの期間 τ の影響については、τ の増加関数 $\varepsilon_1(\tau)$ の影響と相殺すると見做し、次式が成り立っていると仮定する。

$$\varepsilon' = \varepsilon_1(\tau) \left(\frac{1}{B_t^{t+\tau}} - 1 \right)$$

ここで、ε' は正の定数である。

また、保険の販売、積立金の運用・管理等に係る諸経費は運用残高に比例すると仮定する。以上の考察より、次の仮定を設ける。

仮定 4. *1.* 各期 $[t, t + dt]$ における満期までの期間 $[\tau, \tau + d\tau]$ の死亡保険金（生存保険価値除く）の支払い総額は $\varepsilon' \psi_t(\tau) W_t d\tau dt$ である。

2. 各期 $[t, t + dt]$ における満期までの期間 $[\tau, \tau + d\tau]$ の保険積立金の運用・管理等に係る役職員給与を除く経費は $\varepsilon'' \psi_t(\tau) W_t d\tau dt$ である。ここで、ε'' は正の定数。

以下では、富に対する全保険債務比率を $\varPsi_t$ とそれぞれ略記する。すなわち、

$$\varPsi_t = \int_0^{\bar{\tau}} \psi_t(\tau)\, d\tau \tag{2.11}$$

仮定 3 の下、$\varPsi_t$ は次式を満たしている。

$$\varPsi_t = \varPsi_1 + \varPsi_2 r_t + \varPsi_3 \bar{r}_t \tag{2.12}$$

ここで、

$$\varPsi_i = \int_0^{\bar{\tau}} \psi_i(\tau)\, d\tau \qquad i = 1, 2 \tag{2.13}$$

ナイトの不確実性下、生保は最も有り得べき確率測度 P 以外の確率測度の候補として、全ての「等価確率測度」[2] の集合 $\mathbb{P}$ を想定する。尚、任意の等価確率測度 P^ξ は、ギルサノフの定理により、ノビコフの可積分条件を満たす適合的過程 $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ により、ラドン・ニコディム微分として、次式で表現される。

$$\frac{dP^\xi}{dP} = \exp\!\left(\int_0^\infty \sum_{i=1}^{2} \xi_{it}\, dz_{it} - \frac{1}{2} \int_0^\infty (\xi_{1t}^2 + \xi_{2t}^2) dt \right)$$

生保は基礎利益に基づく相似拡大的頑健効用（Menhout (2004)）を所持していると仮定する。

[2] ここで、$\tilde{P}$ が P の等価確率測度とは、両測度の零集合が一致している場合（$P(A) = 0 \Leftrightarrow \tilde{P}(A) = 0$）を言う。

仮定 5. 生保は各期 $[t, t+dt]$ の基礎利益 $c_t dt$ に基づく、次式で表される効用汎関数 $U(c)$ を所持している。

$$U(c) = \inf_{P^\xi \in \mathbb{P}} E^\xi \left[\int_0^\infty e^{-\beta t} \left\{ \frac{c_t^{1-\gamma}}{1-\gamma} + \frac{(1-\gamma)V(X_t)}{2\delta} \left(\xi_{1t}^2 + \xi_{2t}^2\right) \right\} dt \right] \tag{2.14}$$

ここで、γ、δ はそれぞれ相対的危険回避度、「相対的曖昧性回避度」を表す正の定数である。

当該生保は、生命保険債務比率密度過程 $\psi_t(\tau)$、初期時点の短期金利 r_0 と平均短期金利 $\bar{r}_0$ を所与として与えられた富 W_0 を株式指数と全満期の国債を対象に投資しながら当該効用汎関数を最大化する問題を解く。[3] 尚、生命保険会社は、国内株式以外に外国債、外国株式にも投資しているが、何れの投資比率も国内国債に比べ相対的に低いので、外国債、外国株式への投資はそれぞれの代表的指数（円ベース）への投資と仮定すれば、これらの合成株式指数への投資として近似出来る。

以下では、全国債への総投資比率を $\varPhi$ と表記する。すなわち、

$$\varPhi_t = \int_0^{\bar{\tau}} \varphi_t(\tau)\, d\tau \tag{2.15}$$

このとき、株式指数への投資比率は $1 - \varPhi_t + \varPsi_t$ で表されることに留意したい。

以上より、生保の予算制約式が導かれる。

補題 2. 仮定 *1-5* の下、富過程 W は次の予算制約式を満たす。

$$dW_t = \left\{ \left(r_t + \iota \varPsi_t + \sum_{i=1}^2 \varPi_{it} \lambda_{it} \right) W_t - c_t \right\} dt + \sum_{i=1}^2 \varPi_{it} W_t \, dz_{it} \tag{2.16}$$

ここで、$\iota = \iota' - \varepsilon' - \varepsilon''$、

$$\varPi_{it} = \int_0^{\bar{\tau}} \Big(\varphi_t(\tau) - \psi_t(\tau) \Big) \sigma_i(\tau)\, d\tau + (1 - \varPhi_t + \varPsi_t)\rho_i v \qquad i = 1, 2 \tag{2.17}$$

証明. 補論 A.1 参照。 □

予算制約式 (2.16) は、富過程が $u = (c, \varPi_1, \varPi_2)$ で決定されることを示しており、投資家の効用最大化問題における制御変数は $u = (c, \varPi_1, \varPi_2)$ であることが分かる。ここで、$(\varPi_1, \varPi_2)$ は富のボラティリティを表しているので、以下では、$(\varPi_{1t}, \varPi_{2t})$ を「富ボラティリティ・ベースの投資比率」、或いは、略して「投資比率」と呼ぶ。

予算制約式 (2.16) を満たす制御変数 $u = (c, \varPi_1, \varPi_2)$ を初期状態 $X_0 = (W_0, r_0, \bar{r}_0)$ に対する許容的制御と呼び、許容的制御の集合を $\mathcal{B}(X_0)$ と表記する。このとき、生保の最適化問題は次式で定義され、同時に値関数 $V(X_0)$ が定義される。

$$V(X_0) = \sup_{u \in \mathcal{B}(X_0)} U(c) \tag{2.18}$$

3 生命保険最適頑健運用問題の近似解析解

本章では、本生命保険最適頑健運用問題 (2.18) に対する近似最適投資等の近似解析解を楠田 (2013)、楠田・菊池（2014）に沿って導出する。本最適問題は、効用頑健化の為の最小化問題と効用最大化問題から成るが、先ず、効用頑健化の為の頑健確率制御を示し、次に効用最大化の為の確率制御により導出される解の近似法を説明する。そして、近似解析解の候補を導出し、近似最適投資の代表的具体例を挙げ、最後に、同候補解が最適解である為の十分条件を示す。

[3] 通常は富に対する証券の投資比率を最適化するが、本稿では、任意の満期の国債を投資対象としているため富に対する国債投資比率密度過程 $\varphi_t(\tau)$ を最適化する。尚、或る特定の満期の国債の投資比率自体を非零とする投資を認めるため、許容される関数 $\varphi_t(\tau)$ の空間は超関数を含む関数空間とする。

3.1　頑健確率制御

最悪確率候補としての等価確率測度 P^ξ の下での標準ブラウン運動 z^ξ は

$$z^\xi_{it} = z_{it} - \int_0^t \xi_{is} ds \qquad i = 1, 2$$

と表されるので、等価確率測度 P^ξ の下での状態変数に関する確率微分方程式は次のように書き改められる。

$$\begin{aligned} dW_t &= \left\{ \left(r_t + \iota \Psi_t + \sum_{i=1}^{2} \Pi_{it} \lambda_i \right) W_t - c_t + \sum_{i=1}^{2} \Pi_{it} \, W_t \, \xi_{it} \right\} dt + \sum_{i=1}^{2} \Pi_{it} W_t \, dz^\xi_{it} \\ dr_t &= \Big(\kappa \big(\bar{r}_t - r_t \big) - \sigma \xi_{1t} \big) \Big) \, dt - \sigma \, dz^\xi_{1t} \\ d\bar{r}_t &= \left(\bar{\kappa} \big(\bar{r} - \bar{r}_t \big) - \sum_{i=1}^{2} \bar{\rho}_i \bar{\sigma} \xi_{it} \right) dt - \sum_{i=1}^{2} \bar{\rho}_i \bar{\sigma} \, dz^\xi_{it} \end{aligned}$$

従って、頑健効用における HJB 方程式は次式のように表される。

$$\sup_{u \in \mathcal{B}(X_0)} \inf_{P^\xi \in \mathbb{P}} \left[\mathcal{D}^u V - \beta V + \frac{c^{1-\gamma}}{1-\gamma} + \frac{(1-\gamma)V}{2\delta} \|\xi_t\|^2 + \Big(\Pi_{1t} W_t V_W - \sigma V_r - \bar{\rho}_1 \bar{\sigma} V_{\bar{r}} \Big) \xi_{1t} + \Big(\Pi_{2t} W_t V_W - \bar{\rho}_2 \bar{\sigma} V_{\bar{r}} \Big) \xi_{2t} \right] = 0 \tag{3.1}$$

s.t. 横断条件

$$\lim_{T \to \infty} E[\, e^{-\beta T} V(X_T) \,] = 0$$

ここで、

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^u V = & \left\{ \left(r_t + \sum_{i=1}^{2} \Psi_{it} \lambda_{it} \right) W_t - c_t \right\} V_W + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2} \Psi_{it}^2 W_t^2 V_{WW} \\ & - \Psi_{1t} \sigma \, W_t V_{Wr} - \sum_{i=1}^{2} \Psi_{it} \bar{\rho}_i \bar{\sigma} \, W_t V_{W\bar{r}} + \kappa (\bar{r}_t - r_t) V_r + \bar{\kappa} (\bar{r} - \bar{r}_t) V_{\bar{r}} + \frac{1}{2} \sigma^2 V_{rr} + \frac{1}{2} \bar{\sigma}^2 V_{\bar{r}\bar{r}} + \bar{\rho}_1 \sigma \bar{\sigma} V_{r\bar{r}} \end{aligned} \tag{3.2}$$

HJB 方程式 (3.1) における ξ に関する最小化から、最悪確率測度 P^{ξ^*} が次のように求められる。

$$\begin{pmatrix} \xi_1^* \\ \xi_2^* \end{pmatrix} = - \frac{\delta}{(1-\gamma)V} \begin{pmatrix} \Pi_{1t} W_t V_W - \sigma V_r - \bar{\rho}_1 \bar{\sigma} V_{\bar{r}} \\ \Pi_{2t} W_t V_W - \bar{\rho}_2 \bar{\sigma} V_{\bar{r}} \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

3.2　解の近似

上記最悪確率測度を HJB 方程式 (3.1) に代入すると、次式を得る。

$$\sup_{u \in \mathcal{B}(X_0)} \left[\mathcal{D}^u V - \beta V + \frac{c^{1-\gamma}}{1-\gamma} - \frac{\delta}{2(1-\gamma)V} \left\{ \Big(\Pi_{1t} W_t V_W - \sigma V_r - \bar{\rho}_1 \bar{\sigma} V_{\bar{r}} \Big)^2 + \Big(\Pi_{2t} W_t V_W - \bar{\rho}_2 \bar{\sigma} V_{\bar{r}} \Big)^2 \right\} \right] = 0 \tag{3.4}$$

上記 HJB 方程式における制御変数 $u = (c, \Pi_1, \Pi_2)$ に関する最大化の結果、値関数 V に関する偏微分方程式が得られる。

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sigma^2 V_{rr} + \frac{1}{2} \bar{\sigma}^2 V_{\bar{r}\bar{r}} + \bar{\rho}_1 \sigma \bar{\sigma} V_{r\bar{r}} - \frac{1}{2} \frac{q_{1t}^2}{W_t p_t} - \frac{1}{2} \frac{q_{2t}^2}{W_t p_t} + \frac{\delta}{2(\gamma-1)V} \left(\sigma^2 V_r^2 + \bar{\sigma}^2 V_{\bar{r}}^2 + 2 \bar{\rho}_1 \sigma \bar{\sigma} V_r V_{\bar{r}} \right) \\ & \qquad + (r_t + \iota \Psi_t) W_t V_W + \kappa (\bar{r}_t - r_t) V_r + \kappa (\bar{r} - \bar{r}_t) V_{\bar{r}} - \beta V + \frac{\gamma}{1-\gamma} V_W^{-\frac{1-\gamma}{\gamma}} = 0 \end{aligned} \tag{3.5}$$

ここで、

$$p_t = W_t^2 \left(V_{WW} - \frac{\delta V_W^2}{(1-\gamma)V} \right) \tag{3.6}$$

$$q_{1t} = W_t \left\{ \lambda_1 V_W - \sigma \left(V_{Wr} - \frac{\delta V_W V_r}{(1-\gamma)V} \right) - \bar{\rho}_1 \bar{\sigma} \left(V_{W\bar{r}} - \frac{\delta V_W V_{\bar{r}}}{(1-\gamma)V} \right) \right\} \tag{3.7}$$

$$q_{2t} = W_t \left\{ \lambda_2 V_W - \bar{\rho}_2 \bar{\sigma} \left(V_{W\bar{r}} - \frac{\delta V_W V_r}{(1-\gamma)V} \right) \right\} \tag{3.8}$$

上記偏微分方程式から値関数が次の関数形であることが推測される。

$$V(W_t, r_t, \bar{r}_t) = \big(H(r_t, \bar{r}_t)\big)^{\gamma} \frac{W_t^{1-\gamma}}{1-\gamma} \tag{3.9}$$

値関数 V に偏微分を施し、上記偏微分方程式に代入すると、次の命題を得る。

命題 1. 仮定 *1-5* の下、本問題 *(2.18)* の制御変数 u の最適解 $u^* = (c^*, \Pi_1^*, \Pi_2^*)$ は *(3.10)-(3.12)* 式で表され、値関数 V を構成する関数 $H(r_t, \bar{r}_t)$ は *2* 階の偏微分方程式 *(3.13)* の解である。

$$c_t^* = V_W^{-\frac{1}{\gamma}} = \frac{W_t^{-\gamma}}{H} \tag{3.10}$$

$$\Pi_{1t}^* = \frac{1}{\gamma+\delta}\lambda_{1t} + \left(1 - \frac{1}{\gamma+\delta}\right)\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\right)\left(-\sigma\frac{H_r}{H} - \bar{\rho}_1\bar{\sigma}\frac{H_{\bar{r}}}{H}\right) \tag{3.11}$$

$$\Pi_{2t}^* = \frac{1}{\gamma+\delta}\lambda_{2t} + \left(1 - \frac{1}{\gamma+\delta}\right)\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\right)\left(-\bar{\rho}_2\bar{\sigma}\frac{H_{\bar{r}}}{H}\right) \tag{3.12}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\sigma^2}{2}\left(\frac{H_{rr}}{H}\right) + \frac{\bar{\sigma}^2}{2}\left(\frac{H_{\bar{r}\bar{r}}}{H}\right) + \bar{\rho}_1\sigma\bar{\sigma}\left(\frac{H_{r\bar{r}}}{H}\right) \\
&\quad + \frac{\delta}{2(\gamma-1)(\gamma+\delta)}\left\{\sigma^2\left(\frac{H_r}{H}\right)^2 + \bar{\sigma}^2\left(\frac{H_{\bar{r}}}{H}\right)^2 + \bar{\rho}_1\sigma\bar{\sigma}\left(\frac{H_r}{H}\right)\left(\frac{H_{\bar{r}}}{H}\right)\right\} \\
&\quad + \left(\kappa(\bar{r}_t - r_t) + \frac{\gamma+\delta-1}{\gamma+\delta}\sigma\lambda_{1t}\right)\left(\frac{H_r}{H}\right) + \left(\bar{\kappa}(\bar{r} - \bar{r}_t) + \frac{\gamma+\delta-1}{\gamma+\delta}\sum_{i=1}^{2}\bar{\rho}_i\bar{\sigma}\lambda_{it}\right)\left(\frac{H_{\bar{r}}}{H}\right) \\
&\quad - \left(\frac{\gamma-1}{2\gamma(\gamma+\delta)}\sum_{i=1}^{2}\lambda_{it}^2 + \frac{\gamma-1}{\gamma}\Big((1+\iota\Psi_2)r_t + \iota\Psi_3\bar{r}_t\Big) + \frac{\beta+(\gamma-1)\iota\Psi_1}{\gamma}\right) + \left(\frac{1}{H}\right) = 0
\end{aligned} \tag{3.13}$$

証明. 補論 A.2 参照。 □

値関数を構成する金利関数の偏微分方程式 (3.13) の近似解析解を導出する為、同方程式における非斉次項 $1/H(r_t, \bar{r}_t)$ を次のように $\lim_{t\to\infty} E[\log c_t - \log W_t]$ の周りで [4] 対数線形近似する。

$$\frac{1}{H(r_t, \bar{r}_t)} \approx h_0 - h_1 \log H(r_t, \bar{r}_t) \tag{3.14}$$

ここで、

$$h_0 = h_1(1 - \log h_1) \tag{3.15}$$

$$h_1 = \exp\Big(\lim_{t\to\infty} E\Big[\log\Big(\frac{c_t}{W_t}\Big)\Big]\Big) \tag{3.16}$$

(3.14) 式を偏微分方程式 (3.13) の非斉次項 $1/H$ に代入すると、次の近似偏微分方程式を得る。

[4] Campbell and Viceira (2002) は $E[\log c_t - \log W_t]$ の周りで対数線形近似しているが、この場合、$E[\log c_t - \log W_t]$ は r_t と $\bar{r}_t$ に依存する。そこで、一定値をとる $\lim_{t\to\infty} E[\log c_t - \log W_t]$ の周りで対数線形近似を行っている。

$$
\begin{aligned}
&\frac{\sigma^2}{2}\left(\frac{H_{rr}}{H}\right)+\frac{\bar{\sigma}^2}{2}\left(\frac{H_{\bar{r}\bar{r}}}{H}\right)+\bar{\rho}_1\sigma\bar{\sigma}\left(\frac{H_{r\bar{r}}}{H}\right)\\
&\qquad+\frac{\delta}{2(\gamma-1)(\gamma+\delta)}\left\{\sigma^2\left(\frac{H_r}{H}\right)^2+\bar{\sigma}^2\left(\frac{H_{\bar{r}}}{H}\right)^2+\bar{\rho}_1\sigma\bar{\sigma}\left(\frac{H_r}{H}\right)\left(\frac{H_{\bar{r}}}{H}\right)\right\}\\
&\qquad+\left(\kappa(\bar{r}_t-r_t)+\frac{\gamma+\delta-1}{\gamma+\delta}\sigma\lambda_{1t}\right)\left(\frac{H_r}{H}\right)+\left(\bar{\kappa}(\bar{r}-\bar{r}_t)+\frac{\gamma+\delta-1}{\gamma+\delta}\sum_{i=1}^{2}\bar{\rho}_i\bar{\sigma}\lambda_{it}\right)\left(\frac{H_{\bar{r}}}{H}\right)\\
&\qquad-\left(\frac{\gamma-1}{2\gamma(\gamma+\delta)}\sum_{i=1}^{2}\lambda_{it}^2+\frac{\gamma-1}{\gamma}\Big((1+\iota\Psi_2)r_t+\iota\Psi_3\bar{r}_t\Big)+\frac{\beta+(\gamma-1)\iota\Psi_1}{\gamma}-h_0\right)-h_1\log H=0
\end{aligned}
\tag{3.17}
$$

近似偏微分方程式 (3.17) の解が次式で表される 2 次関数の指数関数であることは容易に推測される。

$$
H(r_t,\bar{r}_t)=\exp\left(a_0+a_1r_t+a_2\bar{r}_t+\frac{1}{2}a_{11}r_t^2+a_{12}r_t\bar{r}_t+\frac{1}{2}a_{22}\bar{r}_t^2\right)
\tag{3.18}
$$

このとき、h_1 については、楠田・菊地（2014）により次の補題が示されている。

補題 3. h_1 は $(a_0,a_1,a_2,a_{11},a_{12},a_{22})$ により次式で表される。

$$
\begin{aligned}
h_1=&-a_0-\bar{r}(a_1+a_2)-\frac{1}{2}\left(\bar{r}^2+\frac{\sigma^2}{2\kappa}\right)a_{11}-\left\{\bar{r}^2+\frac{\kappa\bar{\sigma}^2}{2\bar{\kappa}(\kappa-\bar{\kappa})}-\frac{\bar{\sigma}\big((\kappa-\bar{\kappa})\bar{\rho}_1\sigma-\kappa\bar{\sigma}\big)}{(\kappa-\bar{\kappa})(\kappa+\bar{\kappa})}\right\}a_{12}\\
&-\frac{1}{2}\left\{\bar{r}^2+\frac{\kappa^2\bar{\sigma}^2}{2\bar{\kappa}(\kappa-\bar{\kappa})^2}+\frac{(\kappa-\bar{\kappa})^2\sigma^2+\kappa^2\bar{\sigma}^2-2\kappa(\kappa-\bar{\kappa})\bar{\rho}_1\sigma\bar{\sigma}}{2\kappa(\kappa-\bar{\kappa})^2}+\frac{2\kappa\bar{\sigma}\big((\kappa-\bar{\kappa})\sigma\bar{\rho}_1-\kappa\bar{\sigma}\big)}{(\kappa-\bar{\kappa})(\kappa+\bar{\kappa})}\right\}a_{22}
\end{aligned}
\tag{3.19}
$$

3.3 近似解析解

金利・平均金利の 2 変数関数 (3.18) に偏微分を施し、偏微分方程式 (3.17) に代入すると、次式を得る。

$$
\begin{aligned}
&\frac{\sigma^2}{2}\Big(a_{11}+\big(a_1+a_{11}r_t+a_{12}\bar{r}_t\big)^2\Big)+\frac{\bar{\sigma}^2}{2}\Big(a_{22}+\big(a_2+a_{12}r_t+a_{22}\bar{r}_t\big)^2\Big)\\
&\qquad+\bar{\rho}_1\sigma\bar{\sigma}\Big(a_{12}+\big(a_1+a_{11}r_t+a_{12}\bar{r}_t\big)\big(a_2+a_{12}r_t+a_{22}\bar{r}_t\big)\Big)\\
&+\frac{\delta}{2(\gamma-1)(\gamma+\delta)}\Big\{\sigma^2\big(a_1+a_{11}r_t+a_{12}\bar{r}_t\big)^2+\bar{\sigma}^2\big(a_2+a_{12}r_t+a_{22}\bar{r}_t\big)^2+\bar{\rho}_1\sigma\bar{\sigma}\big(a_1+a_{11}r_t+a_{12}\bar{r}_t\big)\big(a_2+a_{12}r_t+a_{22}\bar{r}_t\big)\Big\}\\
&\qquad+\left(\kappa(\bar{r}_t-r_t)+\frac{\gamma+\delta-1}{\gamma+\delta}\sigma\ \big(\lambda_1+\lambda_{11}r_t+\lambda_{12}\bar{r}_t\big)\right)\big(a_1+a_{11}r_t+a_{12}\bar{r}_t\big)\\
&\qquad+\left(\bar{\kappa}(\bar{r}-\bar{r}_t)+\frac{\gamma+\delta-1}{\gamma+\delta}\bar{\sigma}\sum_{i=1}^{2}\bar{\rho}_i\big(\lambda_i+\lambda_{i1}r_t+\lambda_{i2}\bar{r}_t\big)\big(a_2+a_{12}r_t+a_{22}\bar{r}_t\big)\right)\\
&\qquad-\left(\frac{\gamma-1}{2\gamma(\gamma+\delta)}\sum_{i=1}^{2}\big(\lambda_i+\lambda_{i1}r_t+\lambda_{i2}\bar{r}_t\big)^2+\frac{\gamma-1}{\gamma}\Big((1+\iota\Psi_2)r_t+\iota\Psi_3\bar{r}_t\Big)+\frac{\beta+(\gamma-1)\iota\Psi_1}{\gamma}-h_0\right)\\
&\qquad-h_1\left(a_0+a_1r_t+a_2\bar{r}_t+\frac{1}{2}a_{11}r_t^2+a_{12}r_t\bar{r}_t+\frac{1}{2}a_{22}\bar{r}_t^2\right)=0
\end{aligned}
\tag{3.20}
$$

上式は $(r_t^2,\bar{r}_t^2,r_t\bar{r}_t,r_t,\bar{r}_t)$ に関する恒等式であるから、$(a_0,a_1,a_2,a_{11},a_{12},a_{22},h_1)$ に関する連立非線形方程式が得られる。$(r_t^2,\bar{r}_t^2,r_t\bar{r}_t,r_t,\bar{r}_t)$ の各係数と定数項を整理すると、次の連立方程式を得る。

$$
\begin{aligned}
&\frac{\gamma(\gamma+\delta-1)}{(\gamma-1)(\gamma+\delta)}\Big(\sigma^2a_{11}^2+2\bar{\rho}_1\sigma\bar{\sigma}a_{11}a_{12}+\bar{\sigma}^2a_{12}^2\Big)-(h_1+2\kappa)a_{11}\\
&\qquad+\frac{1}{\gamma+\delta}\left\{2(\gamma+\delta-1)\big(\sigma\lambda_{11}a_{11}+\bar{\sigma}\sum_{i=1}^{2}\bar{\rho}_i\lambda_{i1}a_{12}\big)-\frac{\gamma-1}{\gamma}\sum_{i=1}^{2}\lambda_{i1}^2\right\}=0
\end{aligned}
\tag{3.21}
$$

$$\frac{\gamma(\gamma+\delta-1)}{(\gamma-1)(\gamma+\delta)}\Big(\bar{\sigma}^2a_{22}^2+2\bar{\rho}_1\sigma\bar{\sigma}a_{12}a_{22}+\sigma^2a_{12}^2\Big)-(h_1+2\bar{\kappa})a_{22}+2\kappa a_{12}$$
$$+\frac{1}{\gamma+\delta}\left\{2(\gamma+\delta-1)\big(\sigma\lambda_{12}a_{12}+\bar{\sigma}\sum_{i=1}^{2}\bar{\rho}_i\lambda_{i2}a_{22}\big)-\frac{\gamma-1}{\gamma}\sum_{i=1}^{2}\lambda_{i2}^2\right\}=0 \quad (3.22)$$

$$\frac{\gamma(\gamma+\delta-1)}{(\gamma-1)(\gamma+\delta)}\Big(\sigma^2a_{11}a_{12}+\bar{\sigma}^2a_{12}a_{22}+\bar{\rho}_1\sigma\bar{\sigma}(a_{11}a_{22}+a_{12}^2)\Big)+\kappa a_{11}-(h_1+\kappa+\bar{\kappa})a_{12}$$
$$+\frac{1}{\gamma+\delta}\left[(\gamma+\delta-1)\Big\{\sigma\big(\lambda_{11}a_{12}+\lambda_{12}a_{11}\big)+\bar{\sigma}\sum_{i=1}^{2}\bar{\rho}_i\big(\lambda_{i1}a_{22}+\lambda_{i2}a_{12}\big)\Big\}-\frac{\gamma-1}{\gamma}\sum_{i=1}^{2}\lambda_{i1}\lambda_{i2}\right]=0 \quad (3.23)$$

$$\frac{\gamma(\gamma+\delta-1)}{(\gamma-1)(\gamma+\delta)}\Big(\sigma^2a_1a_{11}+\bar{\sigma}^2a_2a_{12}+\bar{\rho}_1\sigma\bar{\sigma}(a_1a_{12}+a_2a_{11})\Big)$$
$$+\frac{(\gamma+\delta-1)\sigma\lambda_1}{\gamma+\delta}a_{11}+\left(\frac{(\gamma+\delta-1)\sum_{i=1}^{2}\bar{\rho}_i\bar{\sigma}\lambda_i}{\gamma+\delta}+\bar{\kappa}\bar{r}\right)a_{12}-(h_1+\kappa)a_1$$
$$+\frac{1}{\gamma+\delta}\left\{(\gamma+\delta-1)\big(\sigma\lambda_{11}a_1+\bar{\sigma}\sum_{i=1}^{2}\bar{\rho}_i\lambda_{i1}a_2\big)-\frac{\gamma-1}{\gamma}\sum_{i=1}^{2}\lambda_i\lambda_{i1}\right\}-\frac{(\gamma-1)(1+\iota\Psi_2)}{\gamma}=0 \quad (3.24)$$

$$\frac{\gamma(\gamma+\delta-1)}{(\gamma-1)(\gamma+\delta)}\Big(\sigma^2a_1a_{12}+\bar{\sigma}^2a_2a_{22}+\bar{\rho}_1\sigma\bar{\sigma}(a_1a_{22}+a_2a_{12})\Big)$$
$$+\frac{(\gamma+\delta-1)\sigma\lambda_1}{\gamma+\delta}a_{12}+\left(\frac{(\gamma+\delta-1)\sum_{i=1}^{2}\bar{\rho}_i\bar{\sigma}\lambda_i}{\gamma+\delta}+\bar{\kappa}\bar{r}\right)a_{22}+\kappa a_1-(h_1+\bar{\kappa})a_2$$
$$+\frac{1}{\gamma+\delta}\left\{(\gamma+\delta-1)\big(\sigma\lambda_{12}a_1+\bar{\sigma}\sum_{i=1}^{2}\bar{\rho}_i\lambda_{i2}a_2\big)-\frac{\gamma-1}{\gamma}\sum_{i=1}^{2}\lambda_i\lambda_{i2}\right\}-\frac{(\gamma-1)\iota\Psi_3}{\gamma}=0 \quad (3.25)$$

$$\frac{\sigma^2}{2}a_{11}+\frac{\bar{\sigma}^2}{2}a_{22}+\bar{\rho}_1\sigma\bar{\sigma}a_{12}+\frac{\gamma(\gamma+\delta-1)}{2(\gamma-1)(\gamma+\delta)}\Big(\sigma^2a_1^2+\bar{\sigma}^2a_2^2\Big)+\left(1+\frac{\delta}{2(\gamma-1)(\gamma+\delta)}\right)\bar{\rho}_1\sigma\bar{\sigma}a_1a_2$$
$$+\frac{\gamma+\delta-1}{\gamma+\delta}\left(\lambda_1a_1+\sum_{i=1}^{2}\bar{\rho}_i\bar{\sigma}\lambda_ia_2\right)-h_1a_0+h_0-\frac{\beta+(\gamma-1)\iota\Psi_1}{\gamma}+\frac{1-\gamma}{2\gamma(\gamma+\delta)}\sum_{i=1}^{2}\lambda_i^2=0 \quad (3.26)$$

(3.15) 式を (3.26) 式に代入し h_0 を消去した後、(3.19) 式を (3.20) に代入し h_1 を消去すると、$(a_0,a_1,a_2,a_{11},a_{12},a_{22})$ の 6 元連立非線形方程式が導出される。但し、同連立方程式は一般に解が複数存在するので、これらの複数の解は最適解の候補に過ぎない。最適解の十分条件は次章で示す。

値関数を構成する金利関数が近似偏微分方程式 (3.17) の解として近似されている場合の値関数、最適基礎利益、最適投資をそれぞれ「近似値関数」、「近似最適基礎利益」、「近似最適投資比率」と呼び、それぞれ $\tilde{V},\tilde{c}^*,\tilde{\Pi}^*$ と表記する。このとき、次の命題を得る。

命題 2. 仮定 *1-5* の下、本問題 *(2.18)* の近似値関数、近似最適基礎利益、近似最適投資比率は次を満たしている。

$$\tilde{V}(W_t,r_t,\bar{r}_t)=\exp\left[\gamma\left\{a_0+a_1r_t+a_2\bar{r}_t+\frac{1}{2}a_{11}r_t^2+a_{12}r_t\bar{r}_t+\frac{1}{2}a_{22}\bar{r}_t^2\right\}\right]\frac{W_t^{1-\gamma}}{1-\gamma} \quad (3.27)$$

$$\tilde{c}_t^*=\exp\left[-a_0-a_1r_t-a_2\bar{r}_t-\frac{1}{2}a_{11}r_t^2-a_{12}r_t\bar{r}_t-\frac{1}{2}a_{22}\bar{r}_t^2\right]W_t \quad (3.28)$$

$$\tilde{\Pi}_{1t}^*=\frac{1}{\gamma+\delta}\lambda_{1t}+\left(1-\frac{1}{\gamma+\delta}\right)\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\right)\left(-\Big(\sigma a_1+\bar{\rho}_1\bar{\sigma}a_2\Big)-\Big(\sigma a_{11}+\bar{\rho}_1\bar{\sigma}a_{12}\Big)r_t-\Big(\sigma a_{12}+\bar{\rho}_1\bar{\sigma}a_{22}\Big)\bar{r}_t\right) \quad (3.29)$$

$$\tilde{\Pi}_{2t}^*=\frac{1}{\gamma+\delta}\lambda_{2t}+\left(1-\frac{1}{\gamma+\delta}\right)\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\right)\left(-\bar{\rho}_2\bar{\sigma}\Big(a_2+a_{12}r_t+a_{22}\bar{r}_t\Big)\right) \quad (3.30)$$

ここで、$(a_0,a_1,a_2,a_{11},a_{12},a_{22})$ は上記 *6* 元連立方程式の解である。

3.4　近似最適投資比率の代表的具体例

近似最適投資比率の代表的な具体例を示す。以下では、(3.29) 式と (3.30) 式の右辺の項をそれぞれ y_{1t}, y_{2t} とする。生命保険会社が満期の異なる国債を 10 年以下国債群 $(0, 10]$、10 年超国債群 $(10, \bar{\tau}]$ の 2 群に分類し、各国債群内の投資比率密度は簡便化の為一様分布とする投資を行う場合を考察する。このとき、2 国債群の最適投資比率密度を $(\tilde{\varphi}^*_{1t}, \tilde{\varphi}^*_{2t})$ とすると、(3.29)(3.30) 式より、$(\tilde{\varphi}^*_{1t}, \tilde{\varphi}^*_{2t})$ は次式を満たしている。

$$\mathsf{A}\begin{pmatrix}\tilde{\varphi}^*_{1t}\\ \tilde{\varphi}^*_{2t}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{1t} + \int_0^{\bar{\tau}} \psi_t(\tau)\sigma_1(\tau)d\tau - (1+\Psi_t)\rho_1 v \\ y_{2t} + \int_0^{\bar{\tau}} \psi_t(\tau)\sigma_2(\tau)d\tau - (1+\Psi_t)\rho_2 v\end{pmatrix} \tag{3.31}$$

ここで、

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} \int_0^{10}(\sigma_1(\tau)-\rho_1 v)d\tau & \int_{10}^{\bar{\tau}}(\sigma_1(\tau)-\rho_1 v)d\tau \\ \int_0^{10}(\sigma_2(\tau)-\rho_2 v)d\tau & \int_{10}^{\bar{\tau}}(\sigma_2(\tau)-\rho_2 v)d\tau \end{pmatrix}$$

従って、各国債群への近似最適投資比率 $(10\tilde{\varphi}^*_{1t}, (\bar{\tau}-10)\tilde{\varphi}^*_{2t})$ は次式を満たしている。

$$\begin{pmatrix} 10\tilde{\varphi_{1t}}^* \\ (\bar{\tau}-10)\tilde{\varphi}^*_{2t}\end{pmatrix} = \mathsf{A}^{-1}\begin{pmatrix} 10\Big\{y_{1t} + \int_0^{\bar{\tau}} \psi_t(\tau)\sigma_1(\tau)d\tau - (1+\Psi_t)\rho_1 v\Big\} \\ (\bar{\tau}-10)\Big\{y_{2t} + \int_0^{\bar{\tau}} \psi_t(\tau)\sigma_2(\tau)d\tau - (1+\Psi_t)\rho_2 v\Big\}\end{pmatrix} \tag{3.32}$$

3.5　最適解の十分条件

上記 6 元連立方程式の解は一般に非最適解を含めて複数存在する。楠田・菊池（2014）は、Maslowski and Veverka (2014) が時点効用関数の割引現在価値の無限時間までの積分の期待値として表される標準的な効用汎関数を最大化する問題に対し十分条件を導出していることに着目した。楠田・菊池（2014）は相似拡大的頑健効用最大化問題における頑健制御の為の最小化問題を解き終わった後の最大化問題が元の問題と同一の HJB 方程式を導くように定式化することにより、本問題を Maslowski and Veverka (2014) の枠組みに位置付け、十分条件を導出している。そこで楠田・菊池（2014）と同様に、本問題 (2.18) の最悪確率導出（効用最小化）後の HJB 方程式 (3.4) と同一の HJB 方程式を導く次の最大化問題を考察する。

$$V(X_0) = \sup_{u\in\mathcal{B}(X_0)} E\left[\int_0^\infty e^{-\beta t} f(X_t, u_t)dt\right] \tag{3.33}$$

ここで、

$$f(X_t, u_t) = \frac{c_t^{1-\gamma}}{1-\gamma} - \frac{\delta}{2(1-\gamma)V}\left\{\left(\Psi_{1t}W_tV_W - \sigma V_r - \bar{\rho}_1\bar{\sigma}V_{\bar{r}}\right)^2 + \left(\Psi_{2t}W_tV_W - \bar{\rho}_2\bar{\sigma}V_{\bar{r}}\right)^2\right\} \tag{3.34}$$

Maslowski and Veverka (2013) で定義されている一般化 Hamitonian 関数の表記法に揃えて、状態変数の SDE を次のように表現する。

$$dX_t = b(X_t, u_t)\,dt + \Sigma(X_t, u_t)\,dz_t \tag{3.35}$$

ここで、

$$b(X_t, u_t) = \begin{pmatrix}(A_t r_t + B_t\bar{r}_t + C_t)W_t - c_t \\ \kappa(\bar{r}_t - r_t) \\ \bar{\kappa}(\bar{r} - \bar{r}_t)\end{pmatrix} \qquad \Sigma(X_t, u_t) = \begin{pmatrix} \Pi_{1t}W_t & \Pi_{2t}W_t \\ -\sigma & 0 \\ \bar{\rho}_1\bar{\sigma} & \bar{\rho}_2\bar{\sigma}\end{pmatrix} \qquad z_t = \begin{pmatrix} z_{1t} \\ z_{2t}\end{pmatrix}$$

ここで、

$$A = 1 + \iota\Psi_2 + \lambda_{11}\Pi_{1t} + \lambda_{12}\Pi_{2t} \tag{3.36}$$

$$B = \iota\Psi_3 + \lambda_{21}\Pi_{1t} + \lambda_{22}\Pi_{2t} \tag{3.37}$$

$$C = \iota\Psi_1 + \lambda_1\Pi_{1t} + \lambda_2\Pi_{2t} \tag{3.38}$$

また、補助変数を

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \qquad \tilde{y} = \begin{pmatrix} \tilde{y}_{11} & \tilde{y}_{12} \\ \tilde{y}_{21} & \tilde{y}_{22} \\ \tilde{y}_{31} & \tilde{y}_{32} \end{pmatrix}$$

と表記すると、最適化問題 (3.33) の一般化 Hamiltonian 関数 $\mathcal{H}$ は次式で定義される。

$$\mathcal{H}(x, u, y, \tilde{y}) = \langle b(x, u), y \rangle + Tr(\Sigma' \tilde{y}) + f(x, u) - \beta \langle x, y \rangle \tag{3.39}$$

ここで、$\langle a, b \rangle$ は a と b の内積を表す。

このとき、最適化問題 (3.33) の一般化 Hamiltonian 関数は次式で表される。

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(X_t, u_y, \tilde{y}) &= y_1 \left\{ (A\, r_t + B\, \bar{r}_t + C\,) W_t - c_t \right\} + y_2 \kappa (\bar{r}_t - r_t) + y_3 \bar{\kappa} (\bar{r} - \bar{r}_t) \\ &\quad + \tilde{y}_{11} \Pi_{1t} W_t - \tilde{y}_{21} \sigma - \tilde{y}_{31} \bar{\rho}_1 \bar{\sigma} + \tilde{y}_{12} \Pi_{2t} W_t - \tilde{y}_{32} \bar{\rho}_2 \bar{\sigma} + \frac{c_t^{1-\gamma}}{1-\gamma} - \frac{\delta}{2(1-\gamma)V} \left(D^2 + E^2 \right) \end{aligned} \tag{3.40}$$

ここで、

$$D = \Pi_1 W V_W - \sigma V_r - \bar{\rho}_1 \bar{\sigma} V_{\bar{r}} \tag{3.41}$$

$$E = \Pi_2 W V_W - \bar{\rho}_2 \bar{\sigma} V_{\bar{r}} \tag{3.42}$$

制御変数 u の最適解は一般化ハミルトニアン関数の 1 階の条件から導出されるが、HJB 方程式との整合性から同解が HJB 方程式から導かれる最適解 $u^* = (c^*, \Pi_1^*, \Pi_2^*)$ と一致する必要がある。補助変数 $(y, \tilde{y})$ が次式を満たす場合に制御変数の最適解が $u^* = (c^*, \Pi_1^*, \Pi_2^*)$ と一致することが示される。

$$\begin{aligned} y^* &= \begin{pmatrix} y_1^* \\ y_2^* \\ y_3^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_W \\ V_r \\ V_{\bar{r}} \end{pmatrix} \\ \tilde{y}^* &= \begin{pmatrix} \tilde{y}_{11}^* & \tilde{y}_{12}^* \\ \tilde{y}_{21}^* & \tilde{y}_{22}^* \\ \tilde{y}_{31}^* & \tilde{y}_{32}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{WW} & V_{Wr} & V_{W\bar{r}} \\ V_{Wr} & V_{rr} V_{W\bar{r}} & \\ V_{W\bar{r}} & V_{r\bar{r}} & V_{\bar{r}\bar{r}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Pi_{1t} W_t & \Pi_{2t} W_t \\ -\sigma & 0 \\ -\bar{\rho}_1 \bar{\sigma} & -\bar{\rho}_2 \bar{\sigma} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \Pi_{1t} W_t V_{WW} - \sigma V_{Wr} - \bar{\rho}_1 \bar{\sigma} V_{W\bar{r}} & \Pi_{2t} W_t V_{WW} - \bar{\rho}_2 \bar{\sigma} V_{W\bar{r}} \\ \Pi_{1t} W_t V_{Wr} - \sigma V_{rr} - \bar{\rho}_1 \bar{\sigma} V_{r\bar{r}} & \Pi_{2t} W_t V_{Wr} - \bar{\rho}_2 \bar{\sigma} V_{r\bar{r}} \\ \Pi_{1t} W_t V_{W\bar{r}} - \sigma V_{r\bar{r}} - \bar{\rho}_1 \bar{\sigma} V_{\bar{r}\bar{r}} & \Pi_{2t} W_t V_{W\bar{r}} - \bar{\rho}_2 \bar{\sigma} V_{\bar{r}\bar{r}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

一般化 Hamiltonian 関数 $\mathcal{H}$ の Hessian H を次式のように定め、

$$\mathsf{H} = \begin{pmatrix} \mathcal{H}_{WW} & \mathcal{H}_{Wr} & \mathcal{H}_{W\bar{r}} & \mathcal{H}_{Wc} & \mathcal{H}_{W\Pi_1} & \mathcal{H}_{W\Pi_2} \\ \mathcal{H}_{rW} & \mathcal{H}_{rr} & \mathcal{H}_{r\bar{r}} & \mathcal{H}_{rc} & \mathcal{H}_{r\Pi_1} & \mathcal{H}_{r\Pi_2} \\ \mathcal{H}_{\bar{r}W} & \mathcal{H}_{\bar{r}r} & \mathcal{H}_{\bar{r}\bar{r}} & \mathcal{H}_{\bar{r}c} & \mathcal{H}_{\bar{r}\Pi_1} & \mathcal{H}_{\bar{r}\Pi_2} \\ \mathcal{H}_{cW} & \mathcal{H}_{cr} & \mathcal{H}_{c\bar{r}} & \mathcal{H}_{cc} & \mathcal{H}_{c\Pi_1} & \mathcal{H}_{c\Pi_2} \\ \mathcal{H}_{\Pi_1 W} & \mathcal{H}_{\Pi_1 r} & \mathcal{H}_{\Pi_1 \bar{r}} & \mathcal{H}_{\Pi_1 c} & \mathcal{H}_{\Pi_1 \Pi_1} & \mathcal{H}_{\Pi_1 \Pi_2} \\ \mathcal{H}_{\Pi_2 W} & \mathcal{H}_{\Pi_2 r} & \mathcal{H}_{\Pi_2 \bar{r}} & \mathcal{H}_{\Pi_2 c} & \mathcal{H}_{\Pi_2 \Pi_1} & \mathcal{H}_{\Pi_2 \Pi_2} \end{pmatrix} \tag{3.43}$$

H の始めの k 行 k 列までの要素から成る行列を H_k と表記する。

このとき、Maslowski and Veverka (2014) Theorem 4 の正則条件の下で、$u^* = (c^*, \Pi_1^*, \Psi_2^*)$ が最適解である為の十分条件は、$\det \mathsf{H}_1(x, u^*, y^*, \tilde{y}^*) < 0$, $\det \mathsf{H}_2(x, u^*, y^*, \tilde{y}^*) > 0$, $\det \mathsf{H}_3(x, u^*, y^*, \tilde{y}^*) < 0$, $\det \mathsf{H}_4(x, u^*, y^*, \tilde{y}^*) > 0$, $\det \mathsf{H}_5(x, u^*, y^*, \tilde{y}^*) < 0$, $\det \mathsf{H}_6(x, u^*, y^*, \tilde{y}^*) > 0$ であることが示される。ここで、H の要素は次のように

表される。

$$\mathcal{H}_{WW} = -\frac{\delta}{2(1-\gamma)}\left\{\frac{2V_W^2 - VV_{WW}}{V^3}\left(D^2+E^2\right) - \frac{4V_W}{V^2}\left(DD_W + EE_W\right) + \frac{2}{V}\left(D_W^2 + DD_{WW} + E_W^2 + EE_{WW}\right)\right\} \tag{3.44}$$

$$\mathcal{H}_{Wr} = y_1 A - \frac{\delta}{2(1-\gamma)}\left\{\frac{2V_W V_r - VV_{Wr}}{V^3}\left(D^2+E^2\right) - \frac{2V_W}{V^2}\left(DD_r + EE_r\right) - \frac{2V_r}{V^2}\left(DD_W + EE_W\right) + \frac{2}{V}\left(D_r D_W + DD_{Wr} + E_r E_W + EE_{Wr}\right)\right\} \tag{3.45}$$

$$\mathcal{H}_{W\bar{r}} = y_1 B\frac{\delta}{2(1-\gamma)}\left\{\frac{2V_W V_{\bar{r}} - VV_{W\bar{r}}}{V^3}(D^2+E^2) - \frac{2V_W}{V^2}\left(DD_{\bar{r}} + EE_{\bar{r}}\right) - \frac{2V_{\bar{r}}}{V^2}\left(DD_W + EE_W\right) + \frac{2}{V}\left(D_{\bar{r}} D_W + DD_{W\bar{r}} + E_{\bar{r}} E_W + EE_{W\bar{r}}\right)\right\} \tag{3.46}$$

$$\mathcal{H}_{Wc} = 0 \tag{3.47}$$

$$\mathcal{H}_{W\Pi_1} = y_1\left(A_{\Pi_1} r_t + B_{\Pi_1}\bar{r}_t + C_{\Pi_1}\right) + \tilde{Y}_{11} - \frac{\delta}{1-\gamma}\left\{-\frac{V_W}{V^2}DD_{\Pi_1} + \frac{1}{V}\left(D_{\Pi_1}D_W + DD_{W\Pi_1}\right)\right\} \tag{3.48}$$

$$\mathcal{H}_{W\Pi_2} = y_1\left(A_{\Pi_2} r_t + B_{\Pi_2}\bar{r}_t + C_{\Pi_2}\right) + \tilde{Y}_{12} - \frac{\delta}{1-\gamma}\left\{-\frac{V_W}{V^2}EE_{\Pi_2} + \frac{1}{V}\left(E_{\Pi_2}E_W + EE_{W\Pi_2}\right)\right\} \tag{3.49}$$

$$\mathcal{H}_{rr} = -\frac{\delta}{2(1-\gamma)}\left\{\frac{2V_r^2 - VV_{rr}}{V^3}\left(D^2+E^2\right) - \frac{4V_r}{V^2}\left(DD_r + EE_r\right) + \frac{2}{V}\left(D_r^2 + DD_{rr} + E_r^2 + EE_{rr}\right)\right\} \tag{3.50}$$

$$\mathcal{H}_{r\bar{r}} = -\frac{\delta}{2(1-\gamma)}\left\{\frac{2V_r V_{\bar{r}} - VV_{r\bar{r}}}{V^3}\left(D^2+E^2\right) - \frac{2V_r}{V^2}\left(DD_{\bar{r}} + EE_{\bar{r}}\right) - \frac{2V_{\bar{r}}}{V^2}\left(DD_r + EE_r\right) + \frac{2}{V}\left(D_r D_{\bar{r}} + DD_{r\bar{r}} + E_r E_{\bar{r}} + EE_{r\bar{r}}\right)\right\} \tag{3.51}$$

$$\mathcal{H}_{rc} = 0 \tag{3.52}$$

$$\mathcal{H}_{r\Pi_1} = y_1 A_{\Pi_1} W_t - \frac{\delta}{1-\gamma}\left\{-\frac{V_r}{V^2}DD_{\Pi_1} + D_{\Pi_1}D_r + DD_{r\Pi_1}\right\} \tag{3.53}$$

$$\mathcal{H}_{r\Pi_2} = y_1 A_{\Pi_2} W_t - \frac{\delta}{1-\gamma}\left\{-\frac{V_r}{V^2}EE_{\Pi_2} + E_{\Pi_2}E_r + EE_{r\Pi_2}\right\} \tag{3.54}$$

$$\mathcal{H}_{\bar{r}\bar{r}} = -\frac{\delta}{2(1-\gamma)}\left\{\frac{2V_{\bar{r}}^2 - VV_{\bar{r}\bar{r}}}{V^3}\left(D^2+E^2\right) - \frac{4V_{\bar{r}}}{V^2}\left(DD_{\bar{r}} + EE_{\bar{r}}\right) + \frac{2}{V}\left(D_{\bar{r}}^2 + DD_{\bar{r}\bar{r}} + E_{\bar{r}}^2 + EE_{\bar{r}\bar{r}}\right)\right\} \tag{3.55}$$

$$\mathcal{H}_{\bar{r}c} = 0 \tag{3.56}$$

$$\mathcal{H}_{\bar{r}\Pi_1} = y_1 B_{\Pi_1} W_t - \frac{\delta}{1-\gamma}\left\{-\frac{V_{\bar{r}}}{V^2}DD_{\Pi_1} + D_{\Pi_1}D_{\bar{r}} + DD_{\bar{r}\Pi_1}\right\} \tag{3.57}$$

$$\mathcal{H}_{\bar{r}\Pi_2} = y_1 B_{\Pi_2} W_t - \frac{\delta}{1-\gamma}\left\{-\frac{V_{\bar{r}}}{V^2}EE_{\Pi_2} + E_{\Pi_2}E_{\bar{r}} + EE_{\bar{r}\Pi_2}\right\} \tag{3.58}$$

$$\mathcal{H}_{cc} = -\gamma c_t^{-(\gamma+1)}, \qquad \mathcal{H}_{c\Pi_1} = 0, \qquad \mathcal{H}_{c\Pi_2} = 0 \tag{3.59}$$

$$\mathcal{H}_{\Pi_1\Pi_1} = -\frac{\delta}{(1-\gamma)V}D_{\Pi_1}^2, \qquad \mathcal{H}_{\Pi_1\Pi_2} = 0, \qquad \mathcal{H}_{\Pi_2\Pi_2} = -\frac{\delta}{(1-\gamma)V}E_{\Pi_2}^2 \tag{3.60}$$

ここで、

$$\begin{pmatrix} A_{\Pi_1} & A_{\Pi_2} \\ B_{\Pi_1} & B_{\Pi_2} \\ C_{\Pi_1} & C_{\Pi_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

$$D_W = \Pi_1\big(V_W + WV_{WW}\big) - \sigma V_{Wr} - \bar{\rho}_1\bar{\sigma}V_{W\bar{r}}, \qquad E_W = \Pi_2\big(V_W + WV_{WW}\big) - \bar{\rho}_2\bar{\sigma}V_{W\bar{r}}$$

$$D_{WW} = \Pi_1\big(2V_W + WV_{WWW}\big) - \sigma V_{WWr} - \bar{\rho}_1\bar{\sigma}V_{WW\bar{r}}, \qquad E_{WW} = \Pi_2\big(2V_W + WV_{WWW}\big) - \bar{\rho}_2\bar{\sigma}V_{WW\bar{r}}$$

$$D_r = \Pi_1 WV_{Wr} - \sigma V_{rr} - \bar{\rho}_1\bar{\sigma}V_{r\bar{r}}, \qquad E_r = \Pi_2 WV_{Wr} - \bar{\rho}_2\bar{\sigma}V_{r\bar{r}}$$

$$D_{Wr} = \Pi_1\big(V_{Wr} + WV_{WWr}\big) - \sigma V_{Wrr} - \bar{\rho}_1\bar{\sigma}V_{Wr\bar{r}}, \qquad E_{Wr} = \Pi_2\big(V_{Wr} + WV_{WWr}\big) - \bar{\rho}_2\bar{\sigma}V_{Wr\bar{r}}$$

$$D_{\bar{r}} = \Pi_1 WV_{W\bar{r}} - \sigma V_{r\bar{r}} - \bar{\rho}_1\bar{\sigma}V_{\bar{r}\bar{r}}, \qquad E_{\bar{r}} = \Pi_2 WV_{W\bar{r}} - \bar{\rho}_2\bar{\sigma}V_{\bar{r}\bar{r}}$$

$$D_{W\bar{r}} = \Pi_1\big(V_{W\bar{r}} + WV_{WW\bar{r}}\big) - \sigma V_{Wr\bar{r}} - \bar{\rho}_1\bar{\sigma}V_{W\bar{r}\bar{r}}, \qquad E_{W\bar{r}} = \Pi_2\big(V_{W\bar{r}} + WV_{WW\bar{r}}\big) - \bar{\rho}_2\bar{\sigma}V_{W\bar{r}\bar{r}}$$

$$\begin{pmatrix} D_{\Pi_1} & D_{\Pi_2} \\ E_{\Pi_1} & E_{\Pi_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} WV_W & 0 \\ 0 & WV_W \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} D_{W\Pi_1} & D_{W\Pi_2} \\ E_{W\Pi_1} & E_{W\Pi_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_W + WV_{WW} & 0 \\ 0 & V_W + WV_{WW} \end{pmatrix}$$

$$D_{rr} = \Pi_1 WV_{Wrr} - \sigma V_{rrr} - \bar{\rho}_1\bar{\sigma}V_{rr\bar{r}}, \qquad E_{rr} = \Pi_2 WV_{Wrr} - \bar{\rho}_2\bar{\sigma}V_{rr\bar{r}}$$

$$D_{\bar{r}\bar{r}} = \Pi_1 WV_{W\bar{r}\bar{r}} - \sigma V_{r\bar{r}\bar{r}} - \bar{\rho}_1\bar{\sigma}V_{\bar{r}\bar{r}\bar{r}}, \qquad E_{\bar{r}\bar{r}} = \Pi_2 WV_{W\bar{r}\bar{r}} - \bar{\rho}_2\bar{\sigma}V_{\bar{r}\bar{r}\bar{r}}$$

$$D_{r\bar{r}} = \Pi_1 WV_{Wr\bar{r}} - \sigma V_{rr\bar{r}} - \bar{\rho}_1\bar{\sigma}V_{r\bar{r}\bar{r}}, \qquad E_{r\bar{r}} = \Pi_2 WV_{Wr\bar{r}} - \bar{\rho}_2\bar{\sigma}V_{r\bar{r}\bar{r}}$$

$$\begin{pmatrix} D_{r\Pi_1} \\ E_{r\Pi_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} WV_{Wr} \\ WV_{Wr} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} D_{\bar{r}\Pi_1} \\ E_{\bar{r}\Pi_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} WV_{W\bar{r}} \\ WV_{W\bar{r}} \end{pmatrix}$$

参考文献

[1] Anderson, E. W., L. P. Hansen, and T. J. Sargent (2003) "A Quartet of Semi-groups for Model Specification, Robustness, Prices of Risk, and Model Detection," *Journal of the European Economic Association*, 1, 68-123.

[2] Campbell, J. Y. and L. M. Viceira (2002) *Strategic Asset Allocation*, Oxford University Press, Oxford, NY.

[3] Duffee, G. R. (2002) "Term Premia and Interest Forecast in Affine Models," *Journal of Finance*, 57, 405-43

[4] Hull, J. C. and A. White (1994) "Numerical Procedures for Implementing Term Structure Models II: Two Factor Models," *Journal of Derivatives*, 2, 37-48.

[5] Knight, F. H. (1921) *Risk, Uncertainty, and Profit*, Boston: Houghton Mifflin.

[6] Maenhout, P. J. (2004) "Robust Portfolio Rules and Asset Pricing," *The Review of Financial Studies*, 17, 4, 951-84.

[7] Maslowski, B. and P. Veverka (2014) "Sufficient Stochastic Maximum Principle for Discounted Control Problem," *Applied Mathematics and Optimization*, 70, .225-52.

[8] Skiadas, C. (2003) "Robust Cotrol and Recursive Utility," *Finance and Stochastics* 7, 475-89.

[9] 楠田浩二 (2013)「相似拡大的頑健効用と 2 ファクター金利モデルに基づく消費と株式・債券投資の多期間最適化問題における 2 種類の近似解析解」Discussion Paper J-40、滋賀大学経済学部附属リスク研究センター

[10] 楠田浩二・菊池健太郎 (2014)「相似拡大的頑健効用と 2 ファクタ-本質的アフィン・モデルに基づく消費と株式・全満期国債投資の多期間最適化問題における近似解析解」Discussion Paper J-50、滋賀大学経済学部附属リスク研究センター

A 証明

A.1 補題 2 の証明

満期までの期間が τ の国債価格、生命保険証券価格をそれぞれ $B_t(\tau)$、$L_t(\tau)$ と表記する。所与の c の下、株式・全国債・全保険証券のポートフォリオ $(\vartheta, \vartheta(\tau), \zeta(\tau))$ を考える。先ず、次式が成り立っている。

$$W_t = \vartheta_t S_t + \int_0^{\bar{\tau}} \vartheta_t(\tau) B_t(\tau) d\tau - \int_0^{\bar{\tau}} \zeta_t(\tau) L_t(\tau) d\tau \tag{A.1}$$

$\varepsilon = \varepsilon' + \varepsilon''$ と略記する。当該ポートフォリオは各時点で $(\varepsilon \Psi_t W_t + c_t)dt$ の流出があることに留意すると、次式が得られる。

$$dW_t = \vartheta_t dS_t + \int_0^{\bar{\tau}} \vartheta_t(\tau) dB_t(\tau) d\tau - \int_0^{\bar{\tau}} \zeta_t(\tau) dL_t(\tau) d\tau - (\varepsilon \Psi_t W_t + c_t)dt \tag{A.2}$$

上式の dS_t、$dB_t(\tau)$、$dL_t(\tau)$ にそれぞれ (2.4) 式、(2.5) 式、(2.9) 式を代入し、そこで現れる $\vartheta_t S_t$ に (A.1) 式を用いると、次式を得る。

$$\begin{aligned} dW_t = &\left(W_t - \int_0^{\bar{\tau}} \vartheta_t(\tau) B_t(\tau) d\tau + \int_0^{\bar{\tau}} \zeta_t(\tau) L_t(\tau) d\tau \right) \left\{ \left(r_t + \sum_{i=1}^2 v_i \lambda_{it} \right) dt + \sum_{i=1}^2 v_i \, dz_{it} \right\} \\ &+ \int_0^{\bar{\tau}} \vartheta_t(\tau) B_t(\tau) \left\{ \left(r_t + \sum_{i=1}^2 \lambda_{it} \sigma_i(\tau) \right) dt + \sum_{i=1}^2 \sigma_i(\tau) \, dz_{it} \right\} d\tau \\ &- \int_0^{\bar{\tau}} \zeta_t(\tau) L_t(\tau) \left\{ \left(r_t + \sum_{i=1}^2 \lambda_{it} \sigma_i(\tau) - \iota' \right) dt + \sum_{i=1}^2 \sigma_i(\tau) \, dz_{it} \right\} d\tau - (\varepsilon \Psi_t W_t + c_t) dt \end{aligned} \tag{A.3}$$

上式に $\vartheta_t(\tau) B_t(\tau) = \varphi_t(\tau) W_t$、$\zeta_t(\tau) L_t(\tau) = \psi_t(\tau) W_t$ を代入し、整理すると、次式を得る。

$$\begin{aligned} dW_t = W_t &\left\{ \left(r_t + \sum_{i=1}^2 v_i \lambda_{it} \right) dt + \sum_{i=1}^2 v_i \, dz_{it} + \int_0^{\bar{\tau}} \left(\sum_{i=1}^2 \Big(\varphi_t(\tau) - \psi_t(\tau) \Big) \Big(\sigma_i(\tau) - v_i \Big) \lambda_{it} + \iota' \psi_t(\tau) \right) d\tau \, dt \right. \\ &\left. + \sum_{i=1}^2 \left(\int_0^{\bar{\tau}} \Big(\sigma_i(\tau) - v_i \Big) d\tau \right) dz_{it} \right\} - (\varepsilon \Psi_t W_t + c_t) dt \end{aligned} \tag{A.4}$$

さらに、上式を整理すると、(2.16) 式が得られる。

A.2 命題 1 の証明

HJB 方程式 (3.4) における最大化の 1 階の条件から制御変数の最適解 $u^* = (c^*, \mathit{\Pi}_1^*, \mathit{\Pi}_2^*)$ は (3.10) 式及び次式で表される。

$$\mathit{\Pi}_{1t}^* = -\frac{V_W}{p_t} \lambda_{1t} + \frac{V_{Wr} - \frac{\delta V_W V_r}{(1-\gamma)V}}{p(Y_t)} \sigma + \frac{V_{W\bar{r}} - \frac{\delta V_W V_{\bar{r}}}{(1-\gamma)V}}{p(Y_t)} \bar{\rho}_1 \bar{\sigma} \tag{A.5}$$

$$\mathit{\Pi}_{2t}^* = -\frac{V_W}{p_t} \lambda_{2t} + \frac{V_{W\bar{r}} - \frac{\delta V_W V_{\bar{r}}}{(1-\gamma)V}}{p_t} \bar{\rho}_2 \bar{\sigma} \tag{A.6}$$

制御変数の最適解 (3.10)(A.5)(A.6) 式を HJB 方程式 (3.4) に代入して整理すると、値関数 V に関する偏微分方程式 (3.5) が得られる。

次に、値関数 (3.9) 式に偏微分を施すと、次の式群を得る。

$$
\begin{aligned}
&W_tV_W=(1-\gamma)V, \quad W_t^2V_{WW}=-\gamma(1-\gamma)V, \quad V_r=\gamma\frac{H_r}{H}V, \quad V_{\bar{r}}=\gamma\frac{H_{\bar{r}}}{H}V,\\
&\qquad W_tV_{Wr}=\gamma(1-\gamma)\frac{H_r}{H}V, \quad W_tV_{W_t\bar{r}}=\gamma(1-\gamma)\frac{H_{\bar{r}}}{H}V,\\
&\qquad V_{rr}=\gamma\left\{\frac{H_{rr}}{H}+(\gamma-1)\left(\frac{H_r}{H}\right)^2\right\}V, \quad V_{\bar{r}\bar{r}}=\gamma\left\{\frac{H_{\bar{r}\bar{r}}}{H}+(\gamma-1)\left(\frac{H_{\bar{r}}}{H}\right)^2\right\}V,\\
&\qquad V_{r\bar{r}}=\gamma\left\{\frac{H_{r\bar{r}}}{H}+(\gamma-1)\left(\frac{H_r}{H}\right)\left(\frac{H_{\bar{r}}}{H}\right)\right\}V
\end{aligned}
\tag{A.7}
$$

Π_t^* は次式を満たしていることに留意しておく。

$$
\Pi_{it}^*=-\frac{q_i(Y_t)}{W_tp(Y_t)} \qquad i=1,2 \tag{A.8}
$$

値関数の偏微分結果 (A.7) を (3.6)(3.7)(3.8) 式に代入すると、(A.9)-(A.11) 式を得る。

$$
W_tp(Y_t)=(\gamma-1)(\gamma+\delta)V \tag{A.9}
$$

$$
q_1(Y_t)=\left\{(1-\gamma)\lambda_{1t}+\gamma(1-\gamma-\delta)\left(-\sigma\frac{H_r}{H}-\bar{\rho}_1\bar{\sigma}\frac{H_{\bar{r}}}{H}\right)\right\}V \tag{A.10}
$$

$$
q_2(Y_t)=\left\{(1-\gamma)\lambda_{2t}+\gamma(1-\gamma-\delta)\left(-\bar{\rho}_1\bar{\sigma}\frac{H_{\bar{r}}}{H}\right)\right\}V \tag{A.11}
$$

(A.8) 式に (A.9)-(A.11) 式を代入すると、(3.11)(3.12) 式を得る。

値関数 V の偏微分方程式 (3.5) における Π_i^* 関連項は (A.9)-(A.11) 式を用いると、次のように整理される。

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{2}\frac{q_1^2(Y_t)}{W_tp(Y_t)}&=-\frac{1}{2(\gamma-1)(\gamma+\delta)}\left((1-\gamma)\lambda_{1t}+\gamma(\gamma+\delta-1)\sigma\frac{H_r}{H}+\gamma(\gamma+\delta-1)\bar{\rho}_1\bar{\sigma}\frac{H_{\bar{r}}}{H}\right)^2V\\
&=-\frac{1}{2(\gamma-1)(\gamma+\delta)}\left\{(\gamma-1)^2\lambda_{1t}^2+\gamma^2(\gamma+\delta-1)^2\left(\sigma^2\left(\frac{H_r}{H}\right)^2+\bar{\rho}_1^2\bar{\sigma}^2\left(\frac{H_{\bar{r}}}{H}\right)^2\right)\right.\\
&\left.-2\gamma(\gamma-1)(\gamma+\delta-1)\lambda_{1t}\left(\sigma\left(\frac{H_r}{H}\right)+\bar{\rho}_1^2\bar{\sigma}^2\lambda_{1t}\left(\frac{H_{\bar{r}}}{H}\right)\right)+2\gamma^2(\gamma+\delta-1)^2\bar{\rho}_1\sigma\bar{\sigma}\left(\frac{H_r}{H}\right)\left(\frac{H_{\bar{r}}}{H}\right)\right\}\\
&=-\frac{\gamma-1}{2(\gamma+\delta)}\lambda_{1t}^2-\frac{\gamma^2(\gamma+\delta-1)^2}{2(\gamma-1)(\gamma+\delta)}\left(\sigma^2\left(\frac{H_r}{H}\right)^2+\bar{\rho}_1^2\bar{\sigma}^2\left(\frac{H_{\bar{r}}}{H}\right)^2-\bar{\rho}_1\sigma\bar{\sigma}\left(\frac{H_r}{H}\right)\left(\frac{H_{\bar{r}}}{H}\right)\right)\\
&\qquad\left.+\frac{\gamma(\gamma+\delta-1)}{\gamma+\delta}\lambda_{1t}\left(\sigma\left(\frac{H_r}{H}\right)+\bar{\rho}_1\bar{\sigma}\left(\frac{H_{\bar{r}}}{H}\right)\right)\right\}
\end{aligned}
\tag{A.12}
$$

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{2}\frac{q_2^2(Y_t)}{W_tp(Y_t)}&=-\frac{1}{2(\gamma-1)(\gamma+\delta)}\left((1-\gamma)\lambda_{2t}+\gamma(\gamma+\delta-1)\bar{\rho}_2\bar{\sigma}\frac{H_{\bar{r}}}{H}\right)^2V\\
=-\frac{1}{2(\gamma-1)(\gamma+\delta)}&\left\{(\gamma-1)^2\lambda_{2t}^2+\gamma^2(\gamma+\delta-1)^2\bar{\rho}_2^2\bar{\sigma}^2\left(\frac{H_{\bar{r}}}{H}\right)^2-2\gamma(\gamma-1)(\gamma+\delta-1)\bar{\rho}_2\bar{\sigma}\lambda_{2t}\left(\frac{H_{\bar{r}}}{H}\right)\right\}\\
&=-\frac{(\gamma-1)}{2(\gamma+\delta)}\lambda_{2t}^2-\frac{\gamma^2(\gamma+\delta-1)^2}{2(\gamma-1)(\gamma+\delta)}\bar{\rho}_2^2\bar{\sigma}^2\left(\frac{H_{\bar{r}}}{H}\right)^2+\frac{\gamma(\gamma+\delta-1)}{\gamma+\delta}\bar{\rho}_2\bar{\sigma}\lambda_{2t}\left(\frac{H_{\bar{r}}}{H}\right)
\end{aligned}
\tag{A.13}
$$

このとき、(A.7)(A.12)(A.13) 式を用いると、V の偏微分方程式 (3.5) における

$$
\sigma^2\left(\frac{H_r}{H}\right)^2, \bar{\sigma}^2\left(\frac{H_{\bar{r}}}{H}\right)^2, \bar{\rho}_1\sigma\bar{\sigma}\left(\frac{H_r}{H}\right)\left(\frac{H_{\bar{r}}}{H}\right) \tag{A.14}
$$

の係数は共通で次のように計算される。

$$\begin{aligned}
&\frac{\gamma(\gamma-1)}{2}-\frac{\gamma^2(\gamma+\delta-1)^2}{2(\gamma-1)(\gamma+\delta)}+\frac{\gamma\delta}{2(\gamma-1)}\\
&\qquad\qquad=\frac{\gamma\Big\{(\gamma-1)^2(\gamma+\delta)-\gamma(\gamma+\delta-1)^2+\gamma\delta(\gamma+\delta)\Big\}}{2(\gamma-1)(\gamma+\delta)}=\frac{\gamma\delta}{2(\gamma-1)(\gamma+\delta)}
\end{aligned}\tag{A.15}$$

値関数 V の偏微分方程式 (3.5) における基礎利益過程 c 関連項は、最適基礎利益 (3.10) 式を代入し、(A.7) 式を用いると、

$$-c^*+\frac{c^{*1-\gamma}}{1-\gamma}=\gamma\,\frac{V}{H}\tag{A.16}$$

を得る。

(A.7) 式、(A.12)(A.13) 式、(A.15)(A.16) 式を V の偏微分方程式 (3.5) に代入し整理すると、(3.13) 式が得られる。